

RUOTE DENTATE

Evolverte di cerchio: luogo delle successive posizioni di un punto di una retta che rotola senza strisciare sopra una circonferenza di raggio ρ (Fig. 1).

Equazioni parametriche dell'evolvente di cerchio

Dall'uguaglianza tra l'arco $\widehat{P_0A}$ ed il segmento \overline{PA} (raggio di curvatura dell'evolvente in P) si ha:

$$\rho(\gamma + \alpha) = \rho \operatorname{tg} \alpha$$

e cioè

$$\gamma = \operatorname{tg} \alpha - \alpha = \operatorname{ev}(\alpha) \quad (1)$$

Dal triangolo POA si trae

$$r = \frac{\rho}{\cos \alpha} \quad (2)$$

Le (1) e (2) sono le equazioni parametriche (parametro α) dell'evolvente nel riferimento polare che vede la

Considerazioni sulla coppia di ruote ad evolvente (vedi figura 2).

Nel punto di contatto tra due evolventi la normale comune è individuata dalla tangente comune ai due cerchi base ed è quindi invariabile la posizione del centro istantaneo di rotazione O del moto relativo (intersezione tra la stessa normale e la congiungente i centri di rotazione O_1, O_2) rispetto agli stessi centri O_1 e O_2 . Vale a dire che i due profili ad evolvente costituiscono una coppia di profili coniugati rispetto alle due linee primitive circolari di raggi $R_1 = \overline{O_1O}$ e $R_2 = \overline{O_2O}$ che con il loro moto relativo di puro rotolamento schematizzano il caso cinematico di rapporto di trasmissione di interesse costanti nel tempo.

Nel generico punto P di contatto (appartenente necessariamente alla retta t) si toccano punti delle due evolventi definiti dagli angoli di pressione α_1 e $\alpha_2 \neq \alpha_1$, mentre nel punto O si toccano i punti individuati da $\alpha_1 = \alpha_2 = \theta$ (angolo di spinta che posiziona la retta t rispetto alla normale alla retta O_1O_2).

Le due famiglie di evolventi simmetriche, equidistanziate angularmente, che definiscono lateralmente il profilo del dente, vengono limitate superiormente ed inferiormente dai cerchi di troncatura esterna e troncatura interna per cui la linea dei contatti, o linea di imbocco, è il segmento \overline{HL} della retta t . La massima estensione di tale segmento è rappresentata dal segmento $\overline{N_1N_2}$; una presupposta condizione di contatto tra i due profili in un punto della retta t esterno al segmento $\overline{N_1N_2}$ comporterebbe in realtà una intersezione tra i profili (interferenza).

Il segmento \overline{HL} definisce sui due cerchi base un ar.

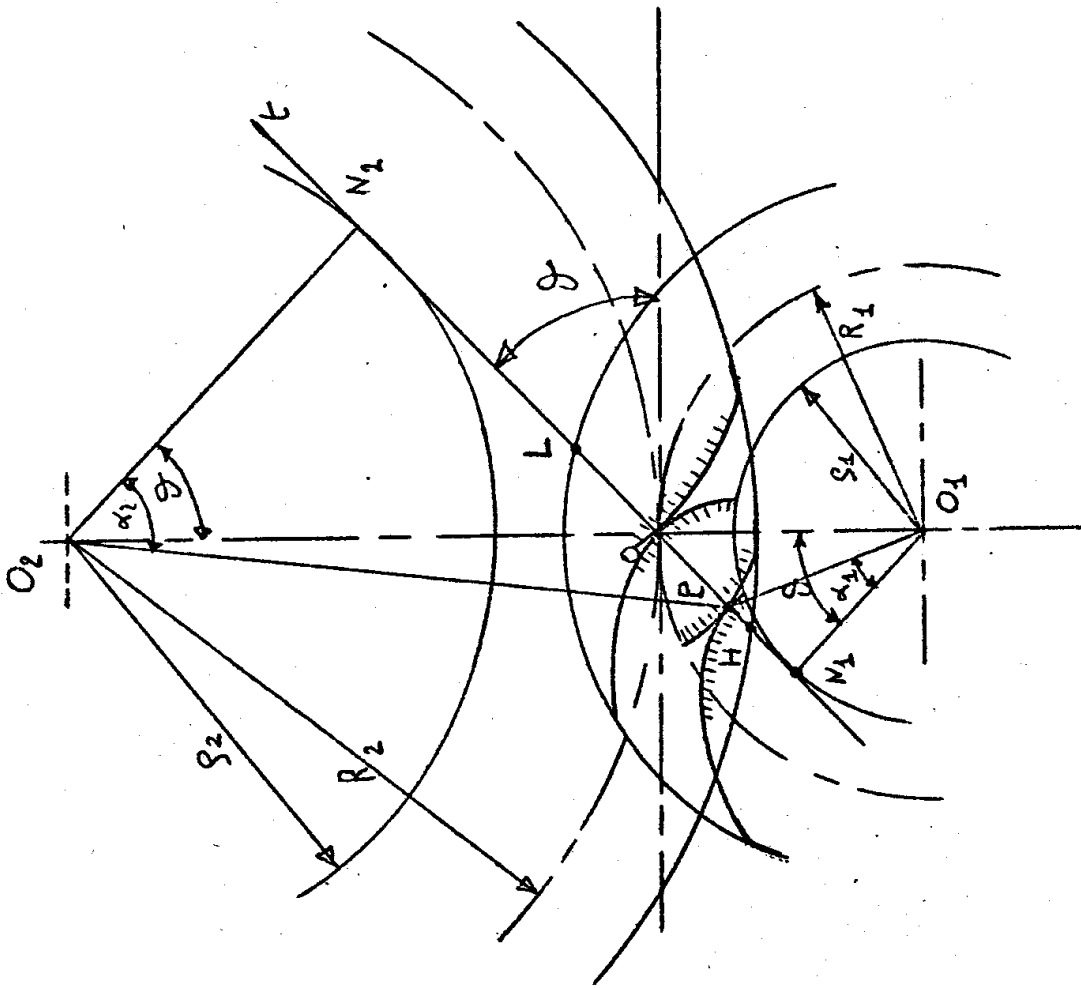


figura 2

(Fig. 3)

... $H_b b_b$) di pari lunghezza, arco di azione sul cerchio base, che rappresenta l'arco per cui un profilo ri-impegnato con quello compagno. Sulle due ruote, per la continuità del moto, occorre disporre più denti, in modo che i profili sul cerchio base si susseguano per un arco minore di HL così che due denti si impegnino prima che il contatto tra la coppia già in presa sia terminato.

L'arco cui si è accennato costituisce il passo base p_b . Per la continuità del moto si impone normalmente

$$\frac{HL}{p_b} \text{ (rapporto d'azione o grado di ricoprimento)} = 1,4 \div 1,7$$

I denti si sagomano con due profili simmetrici in modo che il moto possa trasmettersi nei due sensi.

Posto

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} \text{ (rapporto di trasmissione)}$$

si ha

$$I = R_1 + R_2 = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\cos \theta} \sqrt{\text{Essendo } (R = \frac{\rho}{\cos \theta})}$$

$$\tau = \frac{R_1}{R_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \text{ (dipende quindi solo dai raggi dei cerchi base, qualunque sia l'interasse)}$$

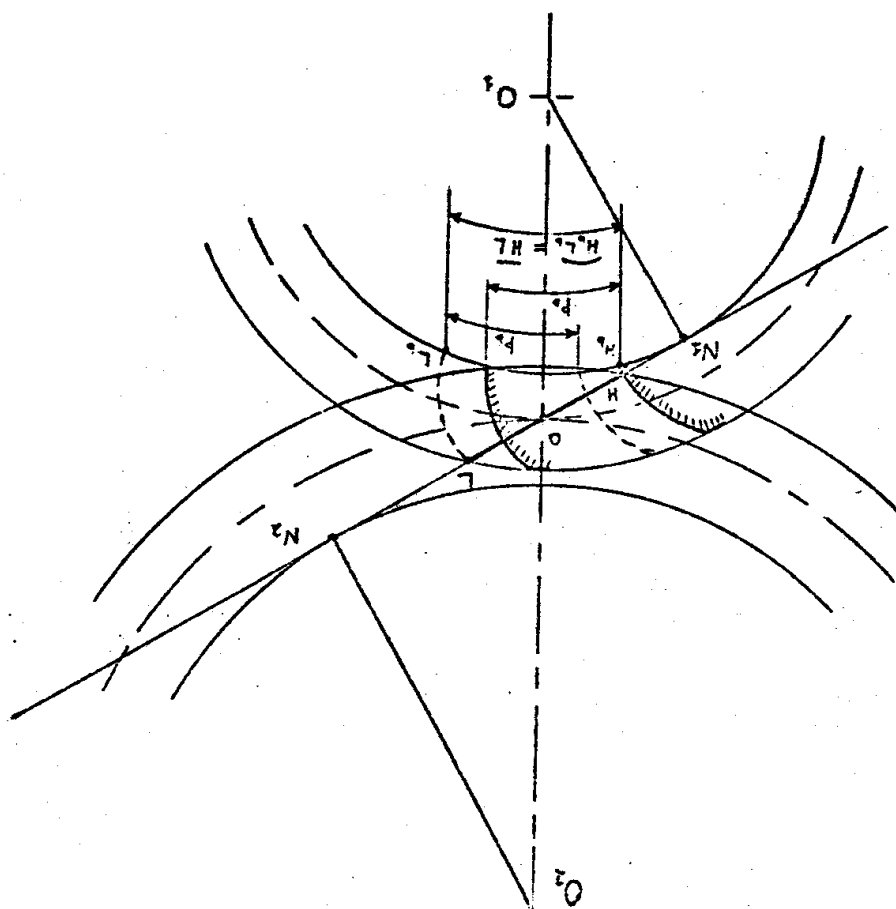


figura 3

ed inversamente

$$R_1 = \frac{\rho}{\gamma + 1} I$$

$$R_2 = \frac{1}{1 + \rho} I$$

$$\cos \theta = \frac{\rho_1 + \rho_2}{I}$$

Si noti che $\overline{ON}_2 = R_2 \sin \vartheta$ se, a pari ϑ , $R_2 \rightarrow \infty$ è anche $\overline{ON}_2 \rightarrow \infty$ per cui in tal caso l'evolvente diventa rettilinea.

Definizioni

Passo = distanza tra punti omologhi di due denti consecutivi misurata sul cerchio primitivo

$$p = \frac{2\pi R}{z}$$

essendo z il numero di denti.

Modulo = $m = \frac{p}{\pi}$

$$\text{Passo base } p_b = \frac{2\pi \rho}{z} = \frac{2\pi}{z} R \cos \vartheta = p \cos \vartheta$$

(e quindi $m_b = m \cos \vartheta$)

addendum o altezza di costa c : altezza radiale della parte di dente esterno al cerchio primitivo.

dedendum o altezza di fianco f : altezza radiale della parte di dente contenuta nel cerchio primitivo.

Il proporzionamento geometrico della dentatura è fatto stabilendo determinati rapporti rispetto al modulo m per cui è in generale:

$$c = k_c \cdot m$$

$$f = k_f \cdot m$$

$$h \text{ (altezza del dente)} = c + f = (k_c + k_f) \cdot m$$

$$D \text{ (diametro primitivo)} = mz$$

$$\begin{aligned} D_e \text{ (diametro di troncatura esterna)} &= D + 2c = \\ &= mz + 2k_c \cdot m = \\ &= m(z + 2k_c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_i \text{ (diametro di troncatura interna)} &= D - 2f = \\ &= mz - 2k_f \cdot m = \\ &= m(z - 2k_f) \end{aligned}$$

Nel proporzionamento cosiddetto di assortimento si assume

$$k_c = 1 \quad \text{e} \quad k_f = 1,25$$

per cui è

$$c = m$$

$$f = 1,25 \cdot m$$

$$h = 2,25 \cdot m$$

$$D_e = m(z + 2)$$

$$D_i = m(z - 2,5)$$

I moduli sono unificati e assumono i valori della tabella 1.

TABELLA 1

Modulo	Incremento
da 0,3 a 1 mm	0,1 mm
sopra 1 a 4 "	0,25 "
" 4 a 7 "	0,50 "
" 7 a 16 "	1 "
" 16 a 24 "	2 "
" 24 a 45 "	3 "
" 45 a 75 "	5 "

Numero minimo di denti

Poichè è $D = mz$, a parità di primitiva, crescendo il modulo, diminuisce il numero di denti. Poichè i denti stessi vanno proporzionati in relazione al modulo, al crescere del modulo crescono anche le loro dimensioni, per cui la linea d'imbocco aumenta, tendendo, quando le coste per le due ruote hanno eguali dimensioni, con un suo estremo al punto limite N_1 .^(Fig. 14) Consideriamo per la ruota (2) il cerchio di testa limite passante per N_1 , ponendo per essa come già detto

$$c_2 = mk_{c2} .$$

Dal triangolo N_1O_2O si trae per il teorema di Carnot:

$$\overline{N_1O_2}^2 = \overline{O_2O}^2 + \overline{N_1O}^2 - 2\overline{OO_2} \cdot \overline{N_1O} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

vale a dire

$$(R_2 + mk_{c2})^2 = R_2^2 + R_1^2 \sin^2 \theta + 2R_1R_2 \sin^2 \theta$$

Poichè

$$R_1 = m \frac{z_1}{2} \quad \text{e} \quad R_2 = m \frac{z_2}{2}$$

si ha

$$z_1^2 + 2z_1z_2 - \frac{4k_{c2}(k_{c2} + z_2)}{\sin^2 \theta} = 0 \quad (3)$$

cioè

$$z_1 = -z_2 + \sqrt{z_2^2 + \frac{4k_{c2}(k_{c2} + z_2)}{\sin^2 \theta}} \quad (\text{numero minimo di denti}) \quad (4)$$

avendo escluso il segno negativo per la radice non potendo essere negativo z_1 .

La dipendenza di z_1 da z_2 per il proporzionamento

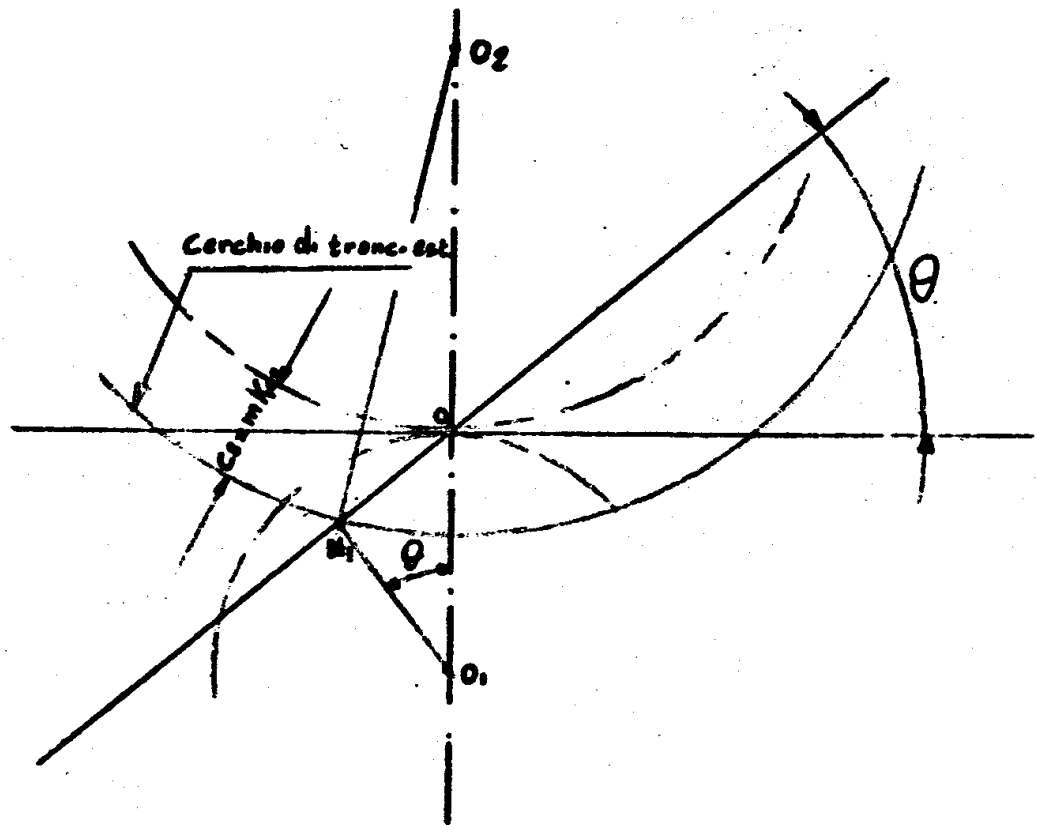


figura 4

di assortimento, e per vari angoli di spinta, è riportata in figura 5 (*).

(*) In fig. 5, come poi nella fig. 6 e 11, l'angolo α è indicato con α .

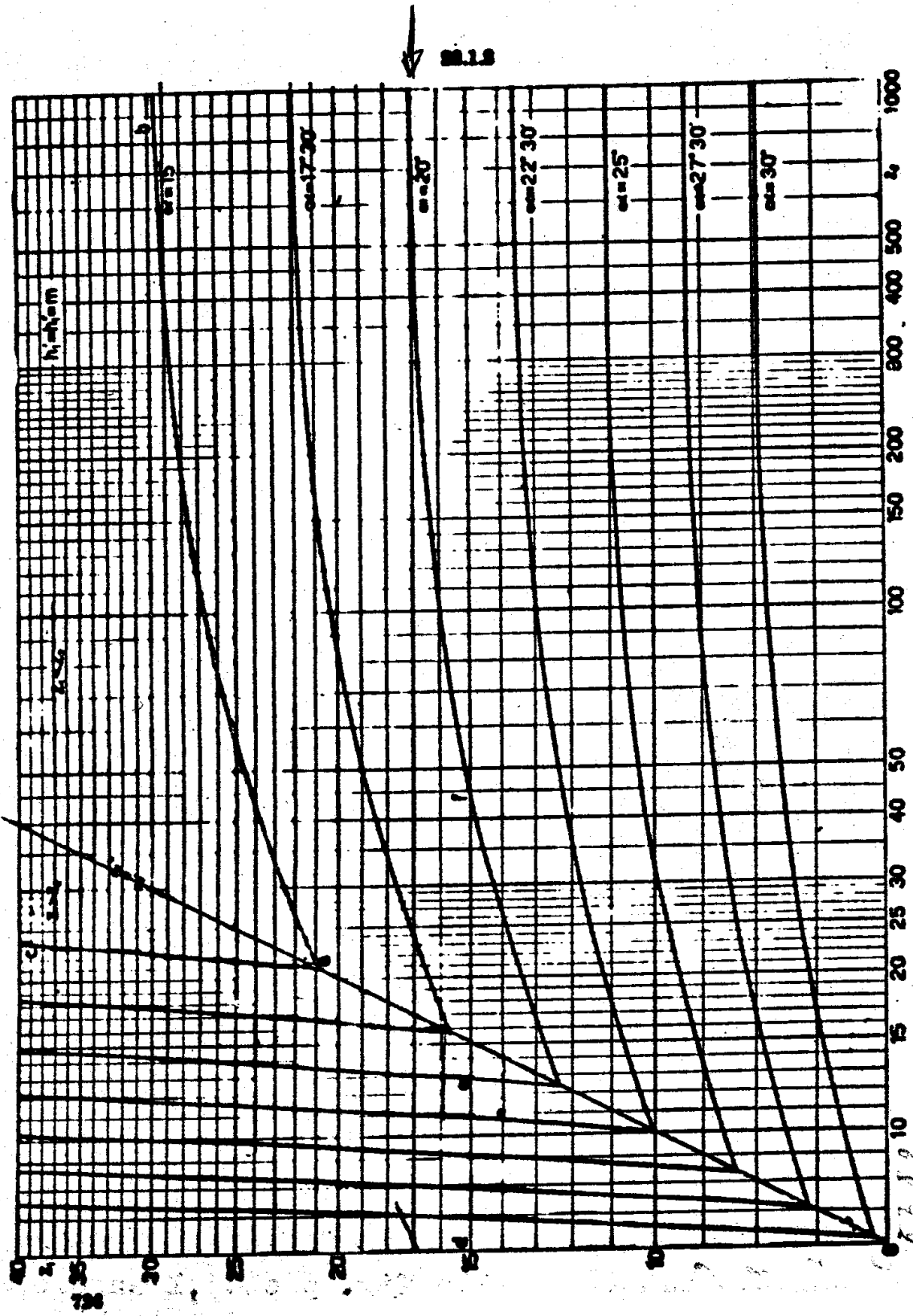


Fig. 22.3
figura 5

Poichè il rapporto di trasmissione è

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{z_1}{z_2}$$

sostituendo nella (3) e risolvendo si ha:

$$z_1 = 2k_{c2} \frac{1 + \sqrt{1 + \tau(\tau + 2) \sin^2 \theta}}{(\tau + 2) \sin^2 \theta} \quad (5)$$

In figura 6 è riportato z_1 in funzione di τ per i vari angoli di spinta nel caso di proporzionamento di assortimento ($k_{c2} = 1$). La rappresentazione ha però validità generale se sulle ordinate si pensa riportata la quantità z_1/k_{c2} .

Per la coppia rocchetto - corona dentata internamente le espressioni trovate conservano la loro validità considerando $R_2 < 0$ e quindi $z_2 < 0$. (dovendosi in effetti considerare in tal caso $\tau < 0$).

L'accoppiamento rocchetto - dentiera corrisponde al caso $\tau = 0$ e dalla (5) il relativo numero minimo di denti si ottiene nella forma

$$z_{10} = \lim_{\tau \rightarrow 0} z_1 = \frac{2k_{c2}}{\sin^2 \theta} = z_0 \cdot k_{c2} \quad (6)$$

cui corrispondono i valori di tabella 2.

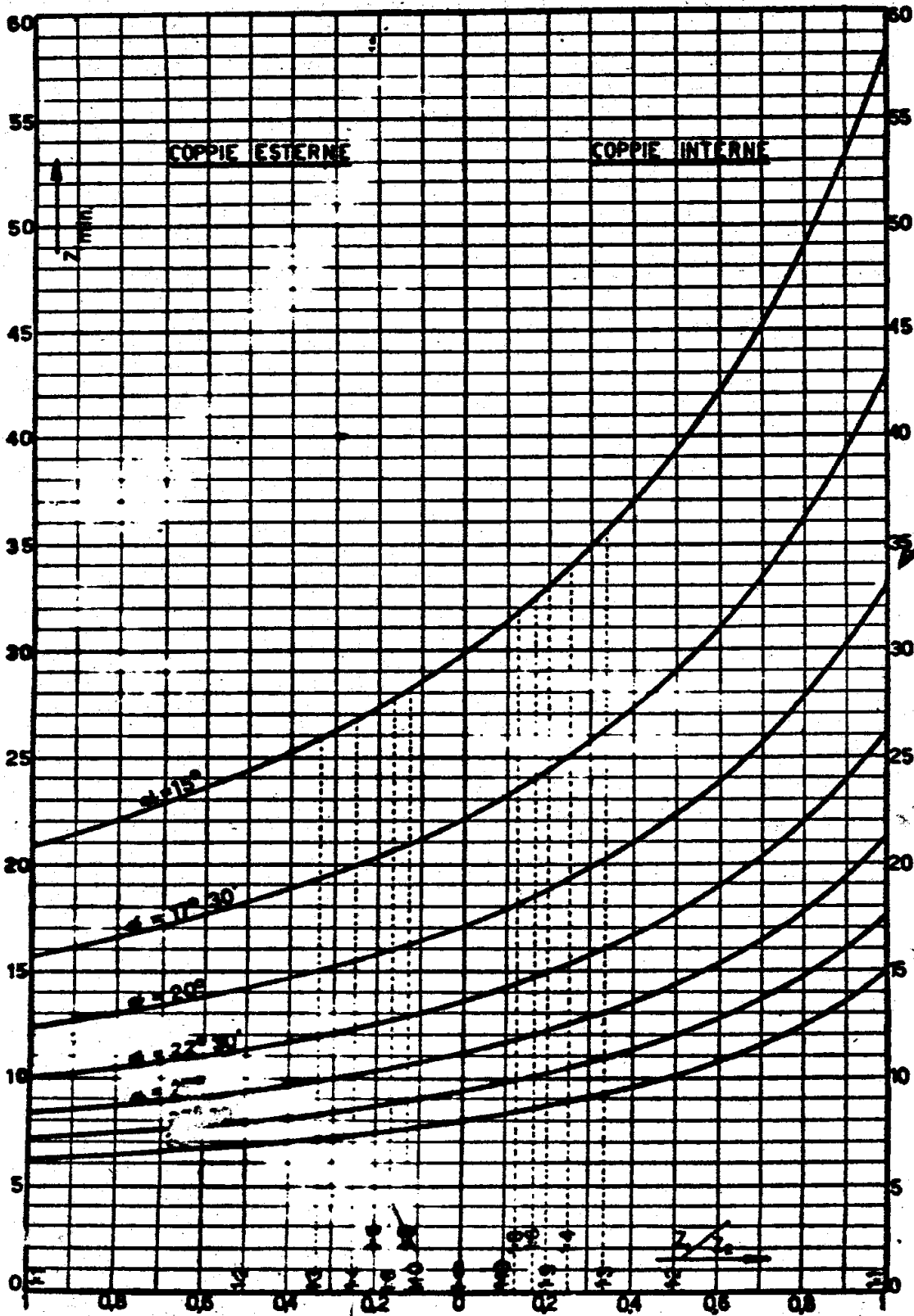


figura 6

Fig. 22.8

TABELLA 2

θ	15°	$17^\circ 30'$	20°	$22^\circ 30'$	25°	$27^\circ 30'$	30°
$z_0 = \frac{z_{10}}{k_{c2}}$	30	22	17	14	12	10	8

Tale espressione si ricava direttamente considerando la specifica situazione d'imbocco (figura 7).

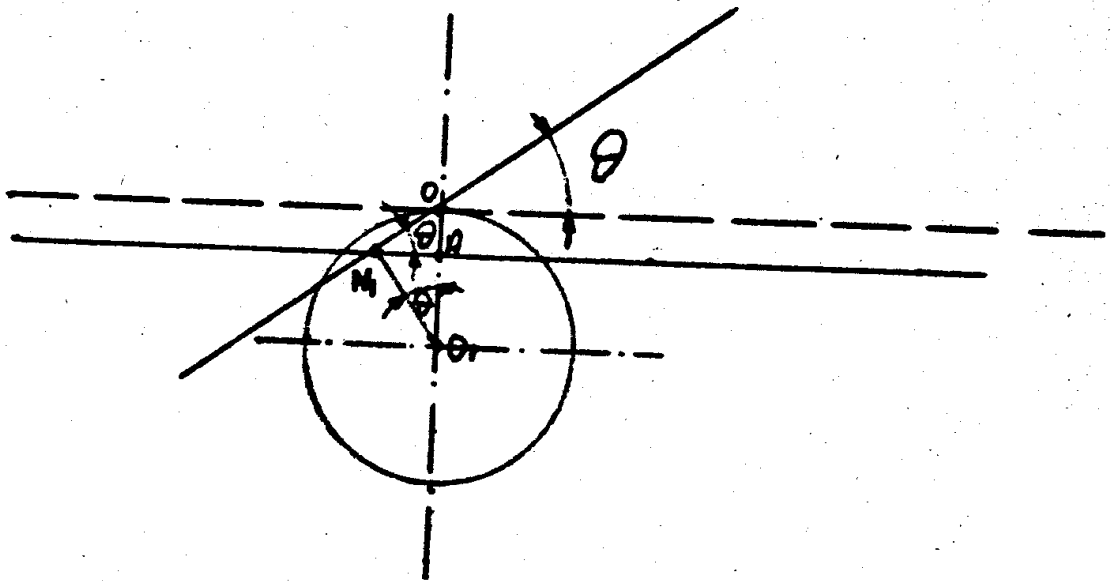


figura 7

E' infatti

$$\overline{OA} = \overline{ON}_1 \sin \theta = R_1 \sin^2 \theta$$

$$\overline{OA} = m k_{c2} ; \quad R_1 = m \frac{z_{10}}{2}$$

Quindi sostituendo nella (7)

$$mk_{c2} = m \frac{z_{10}}{2} \sin^2 \theta$$

e cioè

$$z_{10} = \frac{2}{\sin^2 \theta} k_{c2}$$

Le (4) e (5) mostrano che il numero minimo di denti, a parità di z_2 o di τ , può diminuire in due maniere:

- con l'aumento di θ , che però comporta l'aumento della spinta sui denti e quindi sugli alberi a parità di momento trasmesso, nonché la diminuzione dell'arco d'azione sul cerchio base.

- con il diminuire della costa c_2 della ruota, ciò che è lo stesso a parità di m , con il diminuire di k_{c2} .

Per il primo parametro, dato gli svantaggi riferiti, in effetti si considera una condizione di compromesso che ordinariamente è quello usuale di $\theta = 20^\circ$.

Circa il secondo si può passare ad un proporzionamento geometrico diverso da quello di assortimento vale a dire alla cosiddetta correzione delle dentature.

NO Ruote dentate corrette a cerchi spostati senza variazione dell'interasse.

Poichè in genere le dentature di ruote cilindriche si realizzano con l'utensile dentiera (per dentature esterne)

o con il creatore che nella sezione normale ripete il profilo della dentiera, ci si può riferire alle condizioni limiti per imbocco con dentiera dal momento che senza altro per rapporti $\tau > 0$ z_1 (minimo) risulterebbe ancora più piccolo e quindi ci si troverebbe allontanati dall'interferenza.

E' per questo che ci si riferirà nel prosieguo all'interferenza di generazione con dentiera e quindi alla (6).

Chiamiamo retta di generazione quella corrispondente alla primitiva di generazione della dentiera e linea dei dati quella media del fianco rettilineo della dentiera stessa, tale cioè da separare due tratti di altezza m nonché uno spessore del dente e una larghezza del vano uguali fra loro.

Definiamo spostamento + x se le due rette citate distano di xm in modo tale che la linea dei dati rispetto a quella di generazione si trovi più lontana dal centro della ruota da intagliare.

Se si vuole un numero di denti $z_1 < z_{10}$, con il proporzionamento normale si avrebbe interferenza al taglio per il rocchetto (figura 8).

Dando un affondamento minore (pari ad xm) alla dentiera, il rocchetto presenta un fianco meno alto e corrispondentemente la ruota deve presentare una costano alta.

Per non alterare il rapporto d'azione e quindi mantenere l'altezza complessiva dei denti, la costa del rocchetto può incrementarsi della stessa quantità xm e così il fianco della ruota.

Rimangono inalterati i raggi dei cerchi base ρ_1 e ρ_2 nonché l'interasse e perciò i raggi primitivi $R_1 = \rho_1 / \cos \theta$ e $R_2 = \rho_2 / \cos \theta$, mentre i diametri di troncatura diventano parallelamente

$$D_{e1} = D_1 + 2m(1+x) = m[z_1 + 2(1+x)]$$

$$D_{e2} = D_2 + 2m(1-x) = m[z_2 + 2(1-x)]$$

$$D_{i1} = m[z_1 - 2(1,25-x)]$$

$$D_{i2} = m[z_2 - 2(1,25+x)]$$

Gli spessori dei denti sulle primitive non sono più
uguali a $p/2$ ma presentano valori diversi (pa-
ri alla larghezza del vano e del pigno della dentiera
sulla retta di generazione)

$$s_1 = \frac{\pi m}{2} + 2x m \operatorname{tg} \theta$$

(3)

$$s_2 = \frac{\pi m}{2} - 2x m \operatorname{tg} \theta$$

tali che sempre

$$s_1 + s_2 = p = \pi m$$

Essendo $k_{c2} = 1-x$ sarà pertanto

$$z_1(\text{minimo}) = z_0(1-x) < z_0$$

In tal modo è cresciuta la costa del rocchetto ($k_{c1} = 1 + x$) e si potrebbe giungere all'interferenza al piede del dente della ruota per la quale, in identica maniera, può dirsi che il relativo numero di denti minimo è

$$z_2 = z_0 (1 + x) > z_0$$

Sommando le due espressioni si ha:

$$(z_1 + z_2)_{\min} = 2z_0$$

per cui tale tipo di correzione non può effettuarsi se preventivamente non è verificata la condizione

$$z_1 + z_2 \geq 2z_0$$

Se ciò avviene, lo spostamento x che occorre utilizzare è

$$x = \frac{z_0 - z_1}{z_0} \quad (9)$$

Il massimo spostamento \bar{x} cui corrisponde il minimo numero di denti e del rocchetto e della ruota, e quindi totale, può ritrovarsi in funzione del rapporto di trasmissione.

E'

$$\tau = \frac{z_1}{z_2}$$

quindi

$$(z_1 + z_2)_{\min} = z_1 \left(1 + \frac{1}{\tau}\right) = 2z_0$$

vale a dire

$$\bar{x} = \frac{z_0 - z_1}{z_0} = \frac{1 - \tau}{1 + \tau};$$

in corrispondenza sarà

$$z_1 = z_0 (1 - \bar{x})$$

e

$$z_2 = z_0 (1 + \bar{x})$$

In pratica si accetta una leggera interferenza di generazione, che asporta una piccola parte di evolvente nel l'intorno del suo punto d'origine sul cerchio base, dove la curvatura è infinita, assumendo

$$z_1 \text{ (minimo)} = z_0 \left(\frac{5}{6} - x \right)$$

il che comporta

$$(z_1 + z_2)_{\min} = \frac{5}{3} z_0$$

$$x = \frac{\frac{5}{6} z_0 - z_1}{z_0} \quad (10)$$

ed

$$\bar{x} = \frac{5}{6} \frac{1-k}{1+k}$$

Lo spostamento x tende però a produrre denti che per il rocchetto alla sommità diventano sempre più piccoli di spessore. Occorre perciò garantirsi da quello spostamento limite che conduce al dente a cuspid.

Tale configurazione è riportata in figura 9

L'ampiezza angolare del dente sul cerchio primitivo ricordando la (8), è

$$\varphi_R = \frac{s_R}{R} = \frac{2s_R}{mz_1} = \frac{\pi}{z_1} + 4 \frac{x}{z_1} \operatorname{tg} \theta$$

mentre sul cerchio base si ha:

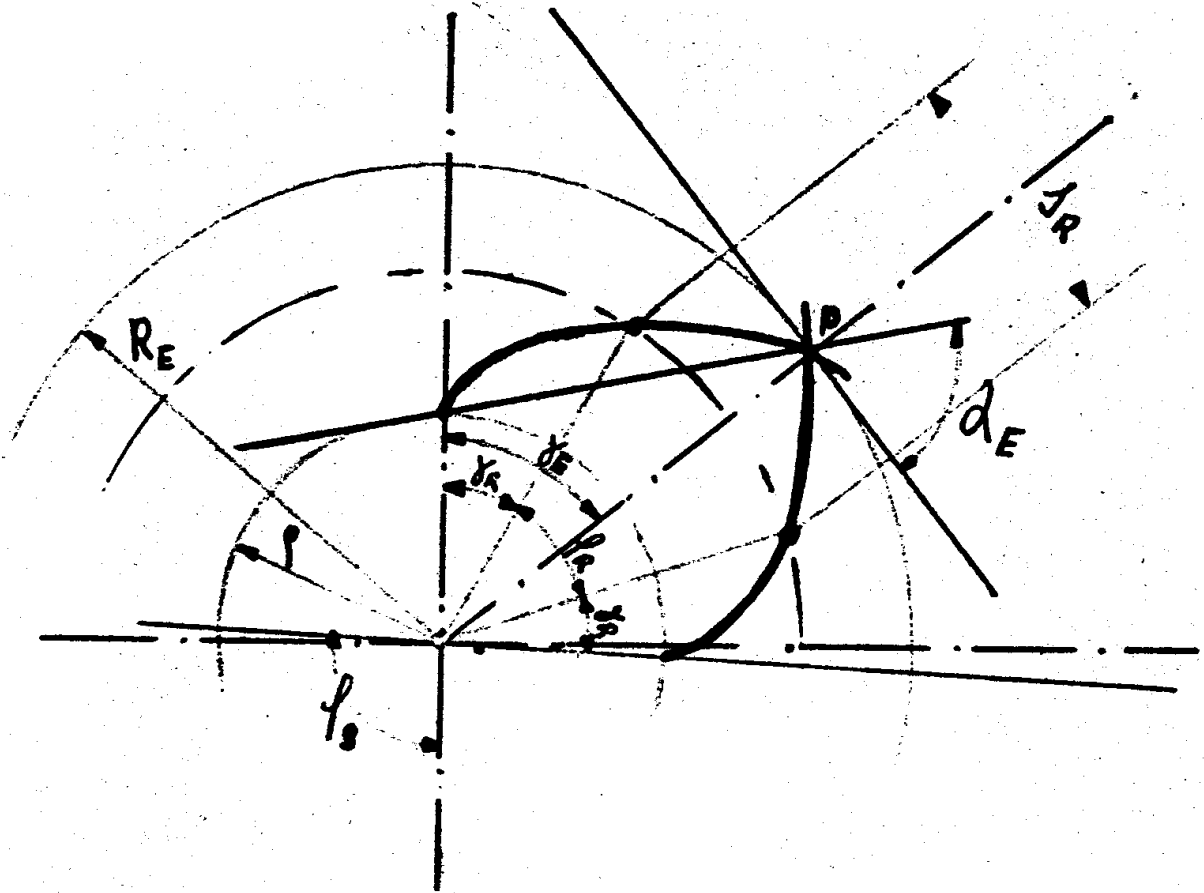


figura 9

$$\varphi_P = \varphi_R + 2\gamma_R = \varphi_R + 2 \operatorname{ev}(\theta) = \frac{\pi}{z_1} + 4 \frac{x}{z_1} \operatorname{tg} \theta + 2 \operatorname{ev}(\theta)$$

Nel punto P di intersezione fra le evolventi simmetriche di uno stesso dente, caratterizzato dall'angolo di pressione α , si ha:

$$2\gamma_E = \varphi_P$$

cioè

$$2 \operatorname{ev}(\alpha_E) = \frac{\pi}{z_1} + 4 \frac{x}{z_1} \operatorname{tg} \theta + 2 \operatorname{ev}(\theta) .$$

vale a dire

$$\operatorname{ev}(\alpha_E) = \frac{\pi}{2z_1} + 2 \frac{x}{z_1} \operatorname{tg} \theta + \operatorname{ev}(\theta) \quad (11)$$

La troncatura che passa per P presenta un diametro

$$D_E = 2R_E = m[z_1 + 2(x+1)] = \frac{2f}{\cos \alpha_E} = mz_1 \frac{\cos \theta}{\cos \alpha_E}$$

da cui si ricava

$$z_1 = 2(1+x) \frac{\cos \alpha_E}{\cos \theta - \cos \alpha_E} \quad (12)$$

Sostituendo la (12) nella (11) si ottiene

$$x_e = \frac{\frac{\pi}{4} - \frac{\cos \alpha_E}{\cos \theta - \cos \alpha_E} [\operatorname{ev}(\alpha_E) - \operatorname{ev}(\theta)]}{\frac{\cos \alpha_E}{\cos \theta - \cos \alpha_E} [\operatorname{ev}(\alpha_E) - \operatorname{ev}(\theta)] - \operatorname{tg} \theta} \quad (13)$$

Le (12) e (13) rappresentano le equazioni parametriche (parametro θ_e) della relazione $x_e = x_e(z_1)$ riportate in figura 10 per due diversi angoli di spinta in uno con le rette corrispondenti alle relazioni (9) e (10).

Ruote cilindriche a denti elicoidali

Se la sezione del dente ottenuta con un piano normale all'asse della ruota, anzichè semplicemente traslare in direzione dell'asse stesso (dente diritto), presenta una rotazione intorno a questo proporzionale alla traslazione, si viene a generare un dente elicoidale. Poichè in ogni sezione normale all'asse si ha un'intersezione che restituisce quei profili atti a soddisfare il moto piano di partenza, si vede che in tal modo non si è introdotta alcuna variazione cinematica. Essendo la traslazione e la rotazione proporzionali tra loro, si ha il simultaneo contatto delle coppie di profili ad evolvente in punti che si proiettano sulla linea di imbocco all'inizio definita ed appartengono ad una retta del piano tangente ai due cilindri base (definito dall'angolo θ_c) inclinata di β_0 rispetto all'asse della ruota (figura 11). Inversamente si vede che, facendo rotolare il detto piano su ciascun cilindro base, ogni punto della retta genera un'evolvente ed in complesso la retta genera l'elicoide ad evolvente. L'insieme dei punti di contatto della retta sul cilindro base costituisce un'elica di passo

$$p = 2\pi \rho \cotg \beta_0$$

che è il passo dell'elicoide.

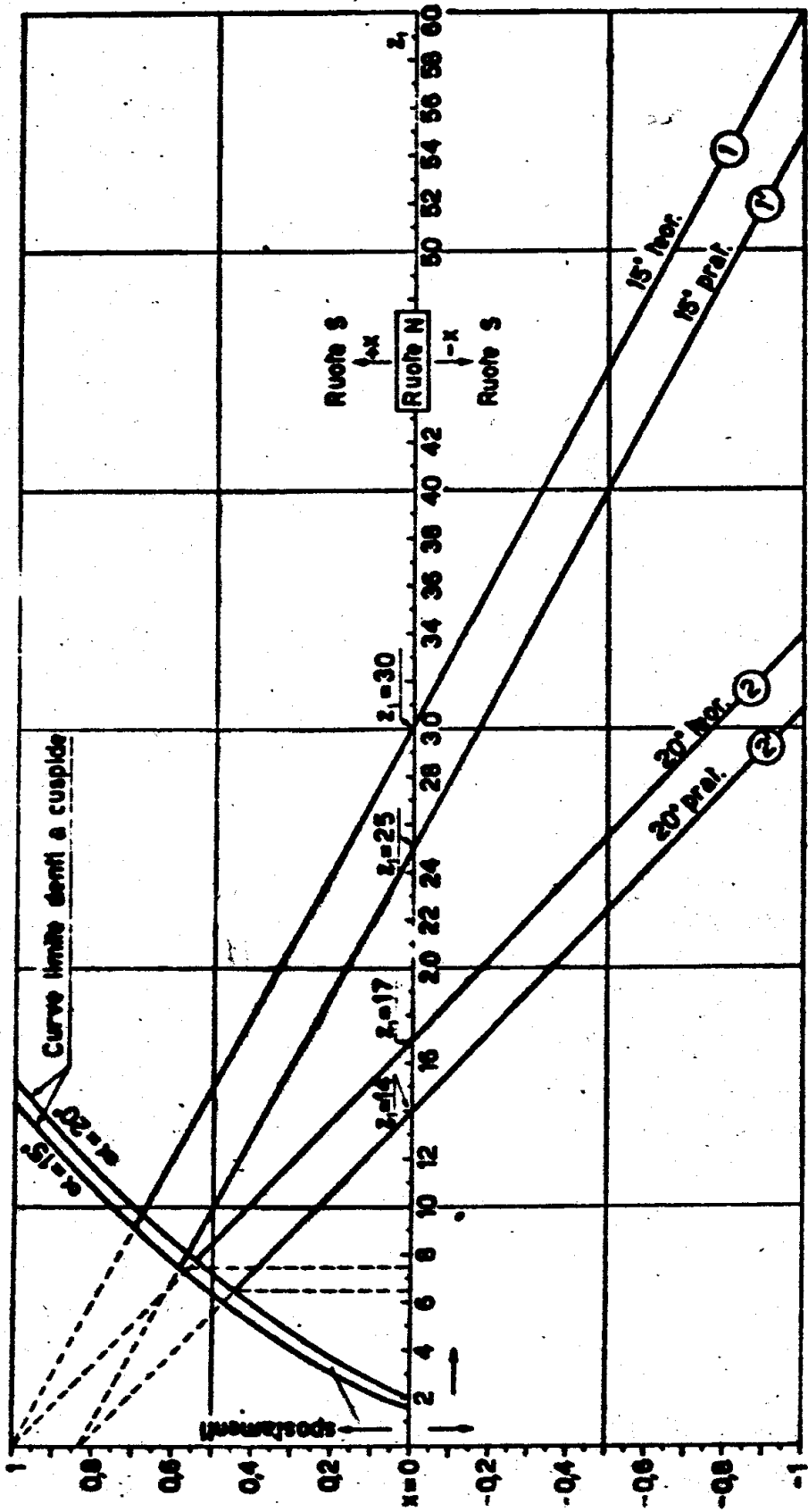


figura 10

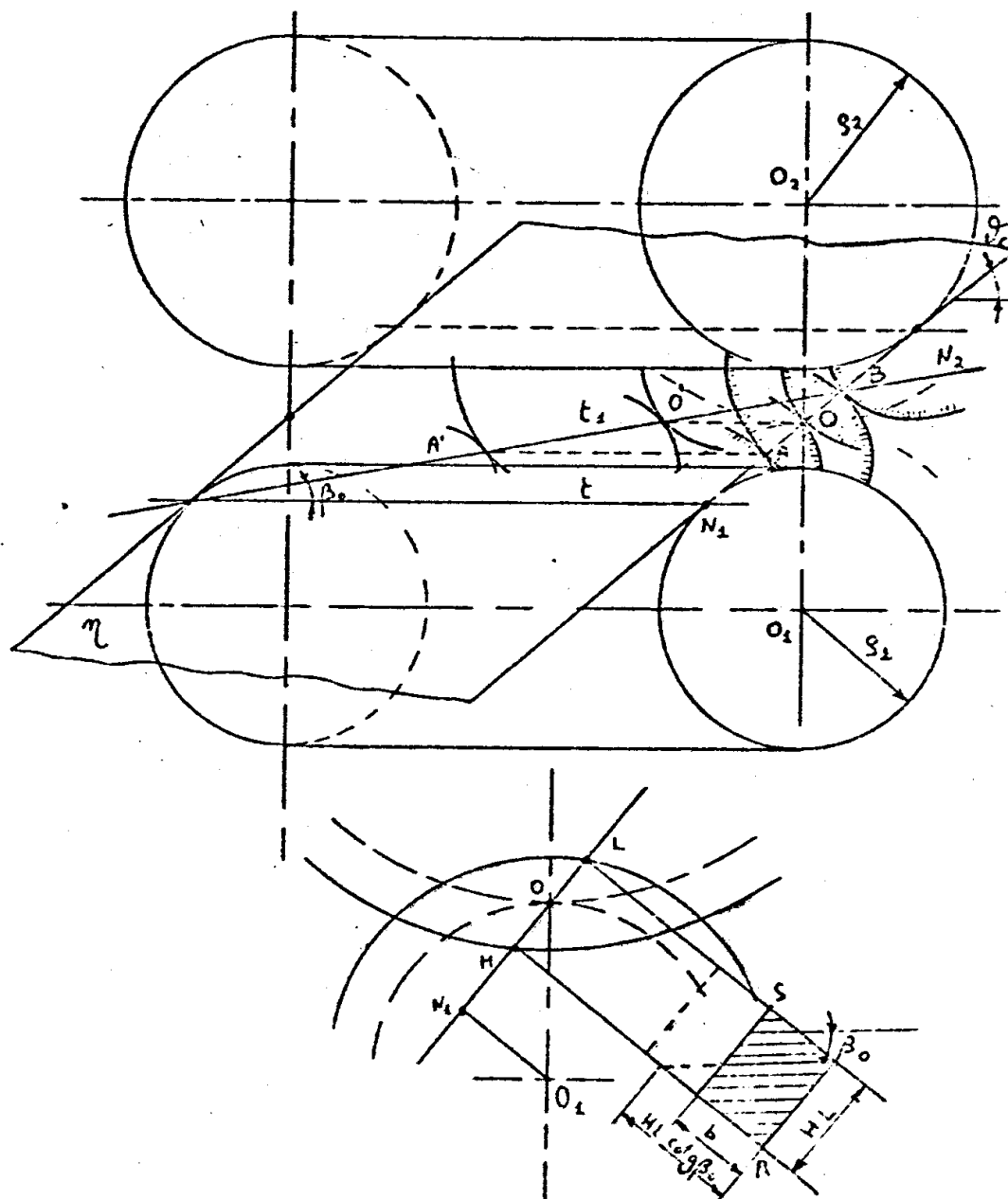


figura 11

Proprietà dell'elicoide ad evolvente

- L'elicoide ad evolvente è definito dal raggio ρ e dall'angolo β_0 con il detto elicoide
- L'intersezione del piano tangente al cilindro base passante per un punto P dell'elicoide, è la retta t_1 passante per quel punto Stesso

- La normale all'elicoide condotta in P appartiene al piano per P tangente al cilindro base

- Il piano tangente all'elicoide in P è normale al piano η tangente al cilindro base e passante per P.

Considerando gli elicoidi di due ruote accoppiate, poichè nella retta τ_1 di evidente contatto essi devono presentare uno stesso piano normale, questo coincide con quello tangente ad entrambi i cilindri base e prende il nome di piano dei contatti. E' evidente che per le due ruote gli elicoidi hanno senso opposto (orario ed antiorario).

Al progredire del moto la retta di contatto tra due denti si sposta con velocità pari a quella periferica comune dei due cilindri base, partendo dallo spigolo R fino a quello S (figura 11, dove sono segnate anche alcune posizioni intermedie).

A seconda che sia

$$\overline{HL} \cotg \beta_0 > b \quad (\text{larghezza delle ruote})$$

si ha

$$l_{\max} = \frac{b}{\cos \beta_0}$$

oppure

$$l_{\max} = \frac{\overline{HL}}{\sin \beta_0}$$

essendo l_{\max} la massima lunghezza del segmento di contatto.

L'intersezione dell'elicoide con il cilindro primitivo costituisce l'asse elicoidale del dente inclinato di β rispetto all'asse della ruota. L'uguaglianza tra i passi assiali di quest'elica e di quella sul cilindro base inclinato di β_0 comporta

$$p_a = 2\pi r \cotg \beta_0 = 2\pi R \cotg \beta = 2\pi \frac{p}{\cos \theta_c} \cotg \beta$$

da cui

$$\frac{\operatorname{tg} \beta_0}{\operatorname{tg} \beta} = \cos \theta_c \quad (14)$$

Profilo frontale e profilo normale

Consideriamo il piano di traccia t_1/f_1 normale a quello η dei contatti, che si sposti parallelamente a se stesso con la velocità periferica della ruota; esso risulterà sempre tangente al dente elicoidale e può pertanto considerarsi il fianco di una dentiera che ingrana con la ruota stessa. Poichè la dentiera (il discorso vale analogamente per il creatore o fresa-vite) è per lo più lo utensile intagliante, è importante trascrivere alcune relazioni geometriche riguardanti i rapporti tra le caratteristiche del profilo cosiddetto normale e di quello circonferenziale o frontale.

Dalla figura 12 in cui sono riportate le sezioni normali e circonferenziali della dentiera si trae

$$p_n = p_c \cos \beta \quad (15)$$

e quindi

$$m_n = m_c \cos \beta$$

(essendo p_n , p_c , m_n , m_c i passi e i moduli normali e circonferenziali), come pure

$$\frac{p_n}{\operatorname{tg} \theta_n} = \frac{p_c}{\operatorname{tg} \theta_c}$$

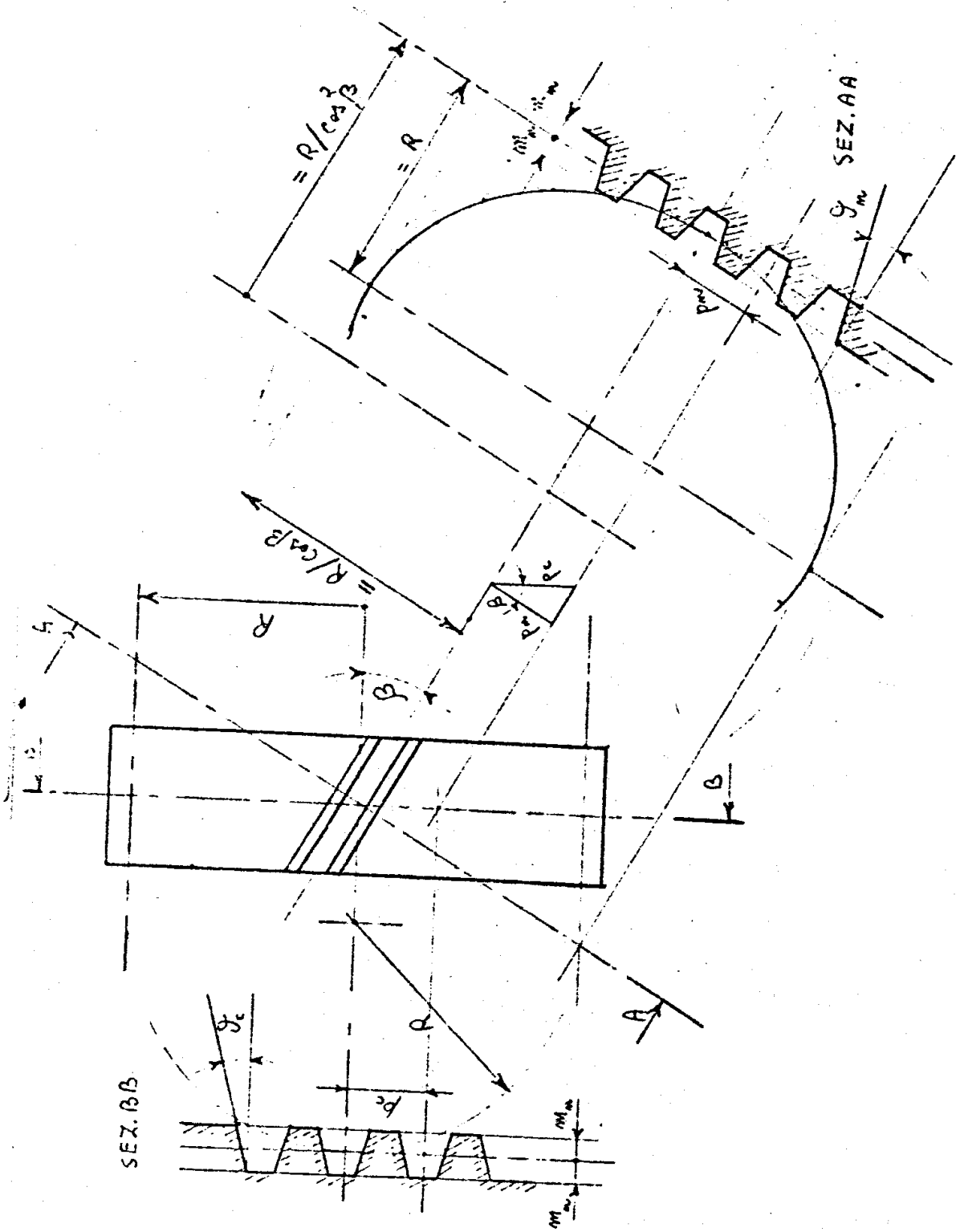


Figura 12

da cui, sostituendo la (15), si ha:

$$\frac{\operatorname{tg} \theta_n}{\operatorname{tg} \theta_c} = \cos \beta \quad (16)$$

Parlare di θ_n non ha in effetti per la ruota significato perchè questa non restituisce evolventi in una sezione effettuata con un piano perpendicolare all'asse elicoidale del dente. Ha senso p_n che rappresenta la lunghezza del tratto di elica, appartenente allo stesso cilindro primitivo, ortogonale agli assi dei denti, compreso tra punti omologhi di due denti consecutivi.

Allorchè il taglio della ruota a denti elicoidali è effettuato con dentiera (o con creatore), i parametri geometrici di riferimento sono quelli della sezione normale e cioè quelli della dentiera medesima.

Numero equivalente di denti

Un piano normale all'asse del dente della dentiera taglia il piano primitivo di questa secondo la retta c (figura 12) ed il cilindro della ruota secondo un'ellisse di semiassi

$$a = \frac{R}{\cos \beta} \quad \text{e} \quad b = R$$

Nel punto di contatto tra piano e cilindro primitivo il raggio di curvatura dell'ellisse è, com'è noto,

$$R = \frac{a^2}{b} = \left(\frac{R}{\cos \beta} \right)^2 \frac{1}{R} = \frac{R}{\cos^2 \beta} \quad (17)$$

La retta c in realtà si avvolge su una curva sghemba costituita dall'elica di angolo di inclinazione β , ma nel punto A si può considerare che ciò avvenga in relazione al cerchio osculatore in A di raggio \bar{R} , fornito dalla (17), in riferimento al quale la dentatura presenta il modulo (15) ed un numero fittizio di denti z^* per cui è anche

$$m_n = \frac{\bar{R}}{z^*}$$

Si ha pertanto, sostituendo nella (15),

$$\frac{\bar{R}}{z^*} = \frac{2R}{z} \cos \beta$$

e per la (17)

$$\frac{2R}{z^* \cos^2 \beta} = \frac{2R}{z} \cos \beta$$

da cui

$$z^* = \frac{z}{\cos^3 \beta} \quad (18)$$

Una ruota cilindrica a denti elicoidali si comporta perciò come una analoga a denti dritti con il numero di denti (18) ed angolo di spinta θ_n .

Poichè $z^* > z$, si deduce che il numero minimo di denti, per assegnato valore di θ_n , risulta più piccolo per una ruota a denti elicoidali che per quella a denti dritti.

Ciò è dovuto anche al fatto che il proporzionamento è effettuato rispetto ad m_n e non rispetto ad m_c .

Spinta sulle ruote cilindriche

Trascurando l'attrito, la spinta totale tra le due dentature in presa si esercita nel piano η di figura 12, che contiene le normali nei punti P di contatto appartenenti ad una retta t_1 .

Chiamando con F tale spinta (figura 13), F_a e \bar{F} le componenti di essa nel piano η , rispettivamente assiale per la ruota e secondo la normale a quest'ultima nel piano η , F_t ed F_r le componenti di \bar{F} , rispettivamente tangenziale e radiale per la ruota, si hanno le seguenti espressioni:

per l'equilibrio alla rotazione è

$$F_t = \frac{M}{R} \quad (M = \text{momento applicato})$$

$$\bar{F} = \frac{F_t}{\cos \theta_c} = \frac{M}{R \cos \theta_c}$$

$$F_a = \bar{F} \operatorname{tg} \beta_0 = \frac{M}{R} \frac{\operatorname{tg} \beta_0}{\cos \theta_c}$$

e per la (14)

$$F_a = \frac{M}{R} \operatorname{tg} \beta$$

$$F_a = \frac{M}{R} \operatorname{tg} \beta$$

La prima provoca reazioni radiali nei cuscinetti con tenute nel piano assiale parallelo ad η , la seconda, oltre la reazione assiale, provoca quelle radiali contenute nel piano assiale cui essa appartiene, dovute alla coppia $F_a \cdot R$.

Se la ruota è a denti dritti ($\beta = 0$), ^{risulta} nulla F_a .

Ruote coniche - Numero equivalente di denti

Nel moto relativo tra corpi girevoli intorno ad assi incidenti, la traiettoria di ogni punto appartiene ad una superficie sferica il cui centro è l'intersezione tra i due assi di rotazione, ed il moto si chiama pertanto sferico. Nello stesso centro coincide il vertice comune dei due coni primitivi. I profili coniugati che si utilizzano sono le evolventi sferiche per la cui comprensione ci si può riportare, con analogia alle ruote cilindriche, alla figura 14. La sfera di raggio arbitrario nel punto d'intersezione dei coni base taglia questi ultimi secondo i cerchi c_1 e c_2 . Il piano tangente, su bande opposte, ai due coni base taglia la detta sfera secondo il cerchio massimo a . Ogni punto di a , quando il piano che lo contiene rotola senza strisciare su ciascuno dei coni base, genera una coppia di evolventi sferiche. Il piano che contiene gli assi dei due coni, sulla solita sfera determina il cerchio massimo b che interseca a in A ed il luogo \overline{OV} dei vari punti O per le varie sfere determina la generatrice di contatto dei due coni primitivi.

Consideriamo il caso in cui i denti sono ottenuti per proiezione da V delle dette evolventi (denti dritti). Inol-

tre, data la piccola estensione dei tratti di profilo che si utilizzano per delimitare il dente, in rapporto al raggio della sfera, si può con l'approssimazione del Tredgold, ritenere i profili stessi appartenenti ai coni tangenti alla sfera secondo i cerchi primitivi (coni complementari) (figura 15). Poichè i coni sono sviluppabili in

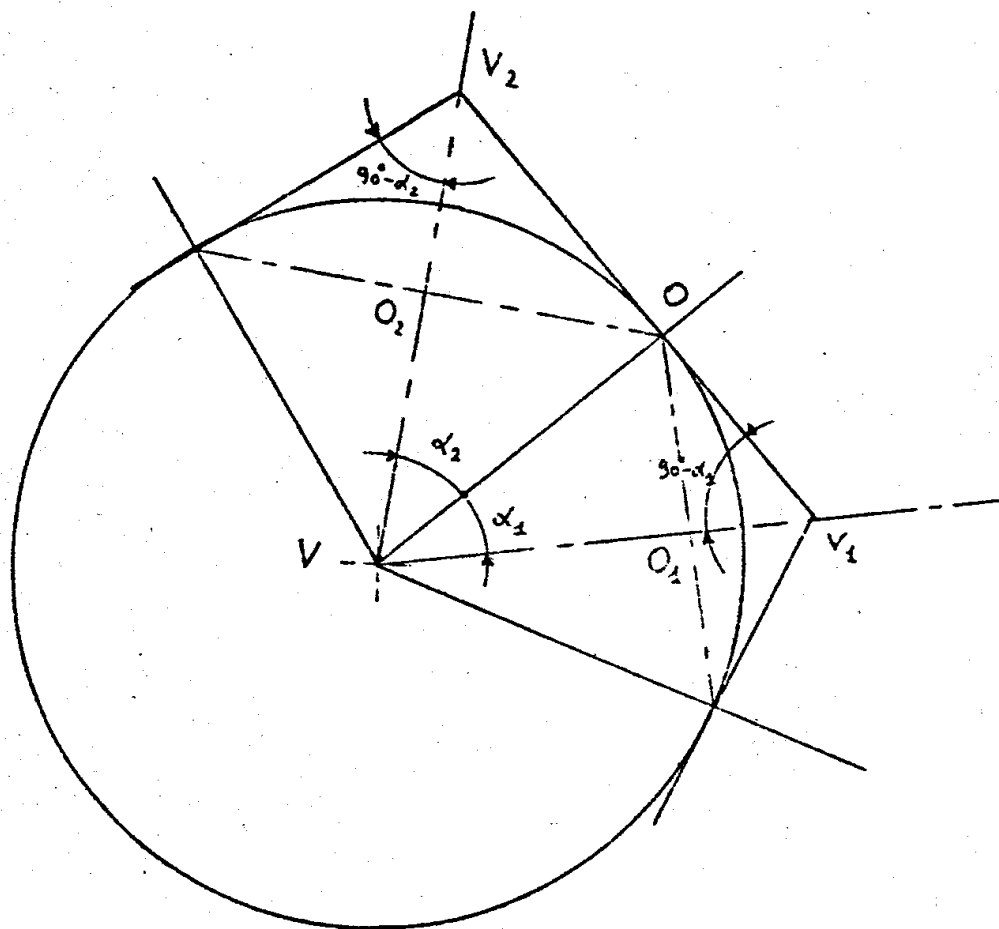


figura 15

piano, si passa in tal modo a considerare una equivalente coppia di ruote cilindriche di raggi

$$R_1^* = \frac{R_1}{\cos \alpha_1} \quad \text{ed} \quad R_2^* = \frac{R_2}{\cos \alpha_2}$$

cui spetta però ovviamente il modulo della dentatura di partenza.

Il numero di denti equivalente delle ruote coniche è dunque

$$z_1^* = \frac{2R_1^*}{m} = \frac{2R_1}{m} \frac{1}{\cos \alpha_1} = \frac{z_1}{\cos \alpha_1}$$

$$z_2^* = \frac{2R_2^*}{m} = \frac{2R_2}{m} \frac{1}{\cos \alpha_2} = \frac{z_2}{\cos \alpha_2}$$

Anche per le ruote coniche, a parità di caratteristiche, si ha un numero di denti minimo inferiore a quello delle ruote cilindriche a denti diritti. Il rapporto di trasmissione che per tale problema occorre considerare è

$$\tau^* = \frac{z_1^*}{z_2^*} = \frac{z_1}{z_2} \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1}$$

Il modulo che definisce la dentatura di una ruota conica è quello della sezione di estremità cui corrisponde il raggio primitivo maggiore. In relazione a questo modulo si applicano i consueti proporzionamenti geometrici.

Spinta sulle ruote coniche

Ipotizzando che la spinta risultante sia localizzata in corrispondenza del punto P della generatrice comune di due coni primitivi ove è R_m il raggio occorre anche qui esprimere il valore della componente che agisce nel piano normale all'asse della ruota e quella della componente secondo l'asse stesso. Sia F la spinta (fig. 16) che agisce nel piano per P ortogonale alla generatrice VP, individuabile nella vista A dove è riportata la scomposizione secondo la componente tangenziale F_t e quella a questa normale \overleftarrow{F}_r . E'

$$F_t = \frac{M}{R_m}$$

$$\overleftarrow{F}_r = F_t \operatorname{tg} \theta = \frac{M}{R_m} \operatorname{tg} \theta$$

La \overleftarrow{F}_r si puo' scomporre nelle direzioni radiale (F_r) e assiale (F_a) ritrovando

$$F_r = \overleftarrow{F}_r \cos \alpha = \frac{M}{R_m} \operatorname{tg} \theta \cos \alpha$$

$$F_a = \overleftarrow{F}_r \sin \alpha = \frac{M}{R_m} \operatorname{tg} \theta \sin \alpha$$

Nel richiamato piano ortogonale all'asse della ruota agisce la risultante

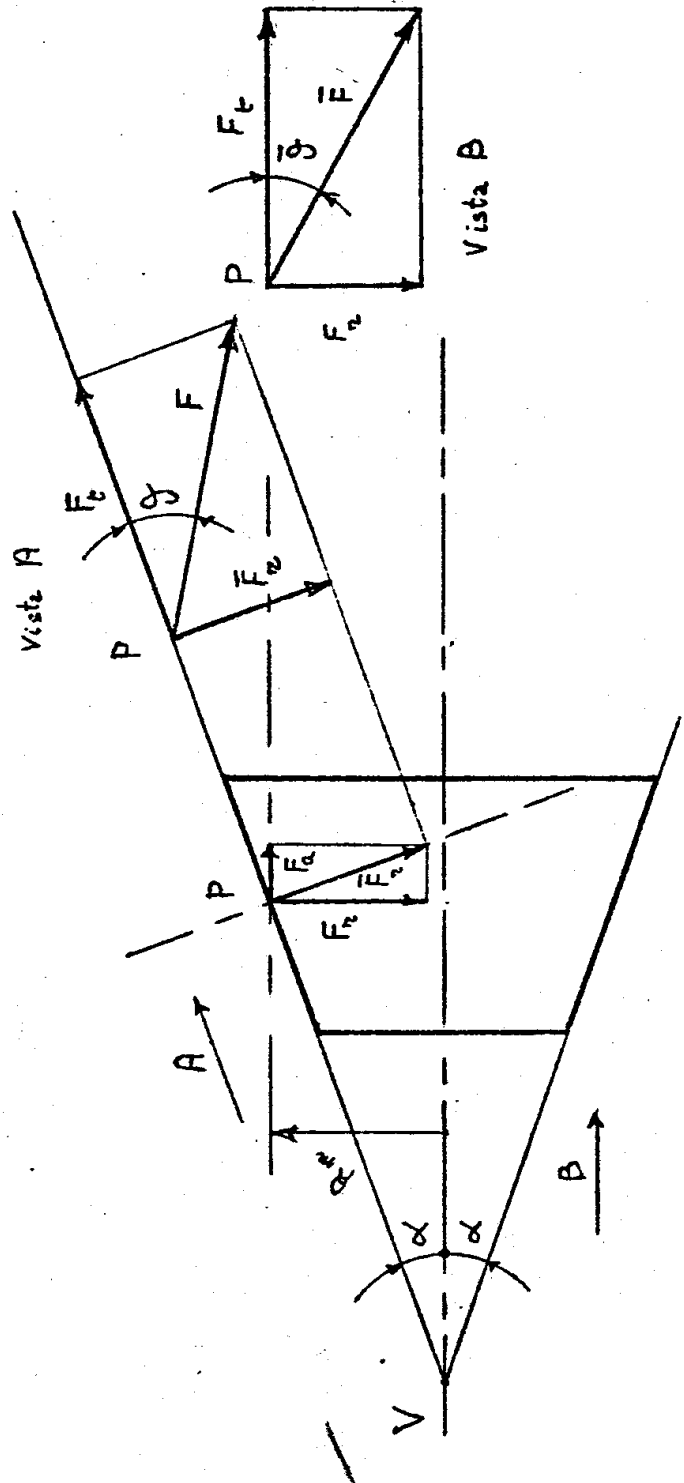


Fig. 16

$$\bar{F} = \sqrt{F_t^2 + F_r^2} = \frac{M}{R_m} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 \theta}$$

inclinate di $\operatorname{tg} \bar{\theta} = \frac{F_r}{F_t} = \operatorname{tg} \theta \cos \alpha$ rispetto alla tangente

in P del cerchio primitivo di raggio R_m cui si aggiunge, in totale, la

$$F_a = \frac{M}{R_m} \operatorname{tg} \theta \sin \alpha$$

Per queste forze \bar{F} ed F_a per quanto attiene i carichi sui cuscinetti, valgono le stesse considerazioni fatte in relazione alle ruote cilindriche.

Resistenza delle dentature

Valutazione della forza che agisce su un dente

E' $F = \frac{M}{\rho}$ la forza corrispondente alla coppia media M . In dipendenza delle effettive condizioni di applicazione del carico si incrementa tale forza secondo un coefficiente di sovraccarico esterno ξ_e (Tab. 3). Per gli errori di costruzione e le deformazioni elastiche sotto carico occorre considerare un ulteriore incremento mediante un coefficiente di sovraccarico interno ξ_i .

Per ξ_i si puo' indicare la formula

$$\xi_i = 1 + \frac{\frac{A}{F \cos \theta}}{1 + \frac{0,15 \sqrt{A}}{V}}$$

essendo

$V = \text{velocità (m/sec)}$

$$A = F \cos \theta + C e b$$

dove

b in cm è la larghezza della ruota

C in kg/cm^2 è una costante riportata in tab. 4

e in cm è l'errore di passo della dentatura ^(o)

TABELLA 4

Valori di C, kg/cm^2 per vari angoli di pressione ψ
e per vari materiali

Materiali	Proporzionamento		
	normale		stub
	$\psi = 14^{\circ}30'$	$\psi = 20^{\circ}$	$\psi = 20^{\circ}$
Ghisa su ghisa	56.200	58.400	60.400
Ghisa su acciaio	77.300	80.000	83.000
Acciaio su acciaio	112.500	116.000	121.000

(^o) - Vedi nota a pag. ~~5~~ 296

Tenendo conto di una riduzione secondo il coefficiente $\psi' = 1 + 1,4$ per la ripartizione della forza totale F sulle coppie di denti in presa, sul singolo dente va ap-

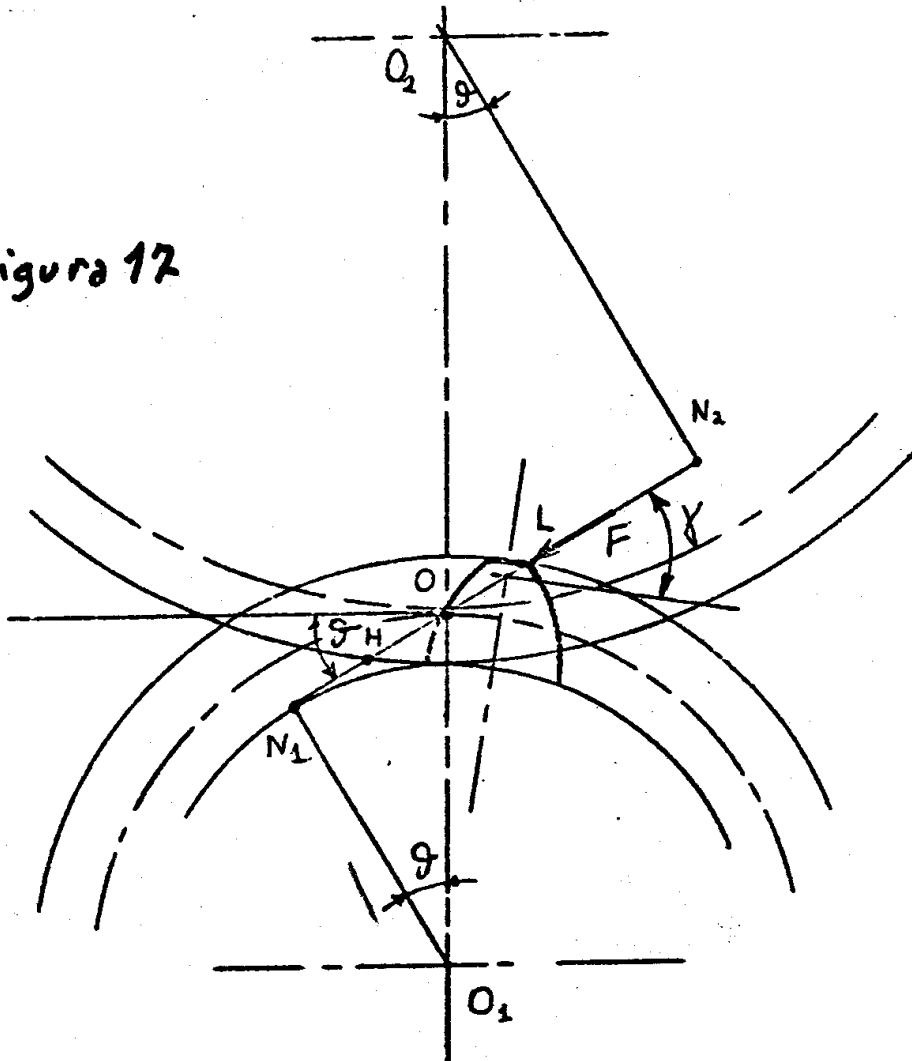
plicata la forza

$$F^* = F \frac{\xi_i \xi_e}{\psi'} \quad (19)$$

Calcolo a rottura

Si considera il dente caricato all'estremità della linea d'imbocco dove la forza applicata è inclinata dello angolo γ rispetto alla normale all'asse del dente, visto come mensola incastrata (figura 17).

Figura 17



Individuando con la parabola di uniforme resistenza la sezione di incastro (figura 18) di altezza s e distanza a dal punto A, ci si riferisce al punto B, perchè per l'intaglio al piede del dente è la sollecitazione di trazione critica di fini della resistenza a fatica.

Questa sollecitazione vale

$$\sigma = \frac{6F^* a \cos \gamma}{bs^2} - \frac{F^* \sin \gamma}{bs} \quad (20)$$

$$\sigma = \frac{6F^* a \cos \gamma - F^* \sin \gamma}{bs^2} = F^* \frac{6a \cos \gamma - \sin \gamma}{bs^2}$$

essendo b la larghezza della ruota.

Ricordando la (19), nonchè la $F_t = F \cos \theta$, con la posizione

$$\psi = \frac{\left(\frac{s}{m}\right)^2 \cos \theta}{6 \frac{a}{m} \cos \gamma - \frac{s}{m} \sin \gamma} \quad (\text{vedi fig. 19})$$

la (20) diventa

$$\sigma = \frac{F_t \xi_e \xi_i}{b m \psi \psi'} \quad \begin{matrix} \psi' = 1,2 \\ \xi_e = 1,4 \end{matrix} \quad (21)$$

Per una verifica del dente, tale tensione normale deve risultare non maggiore della resistenza a fatica per sollecitazione di flessione dall'origine σ_{afo} (tabella fuori testo), per cui la massima forza periferica trasmissibile è

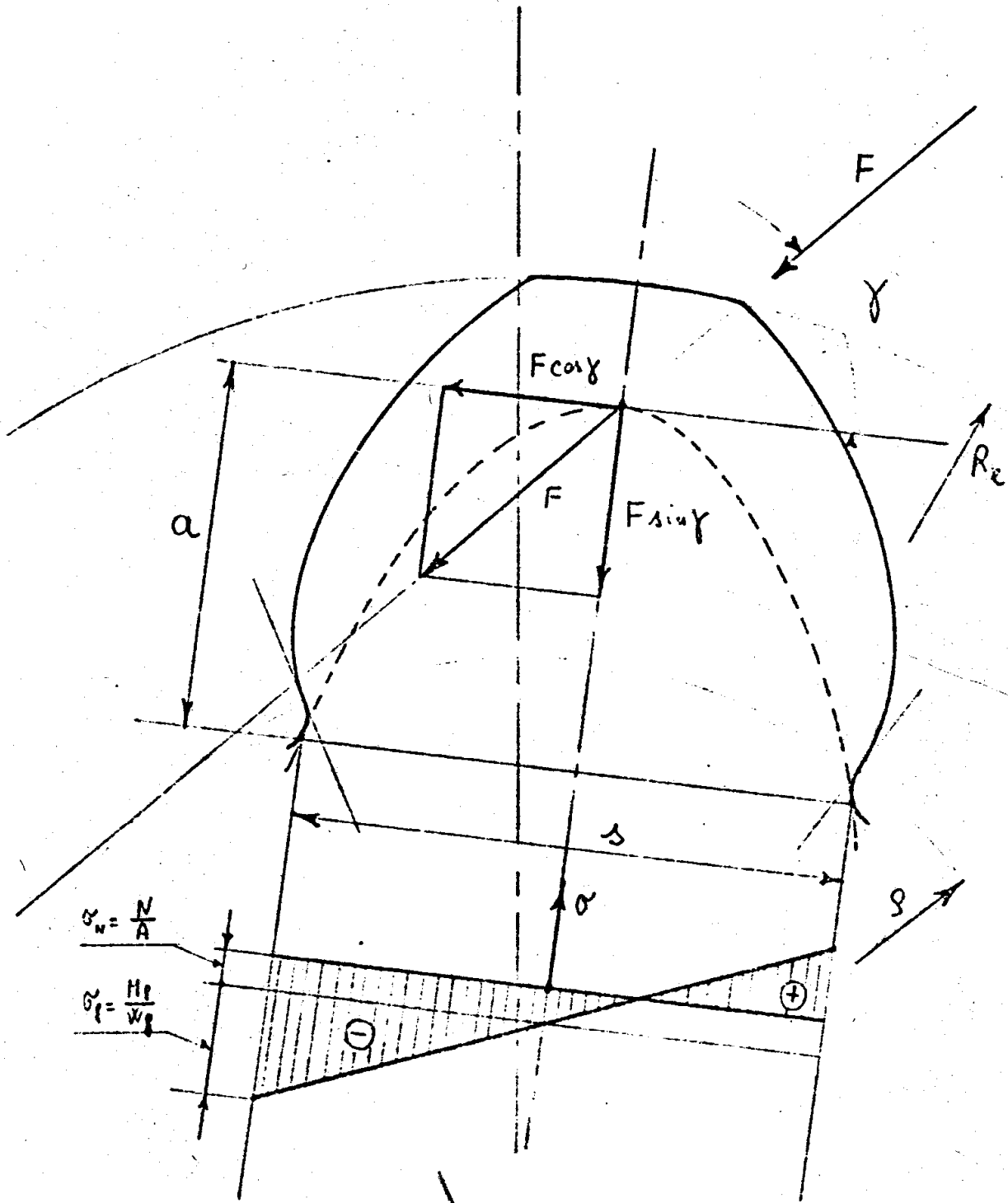


Figura 18

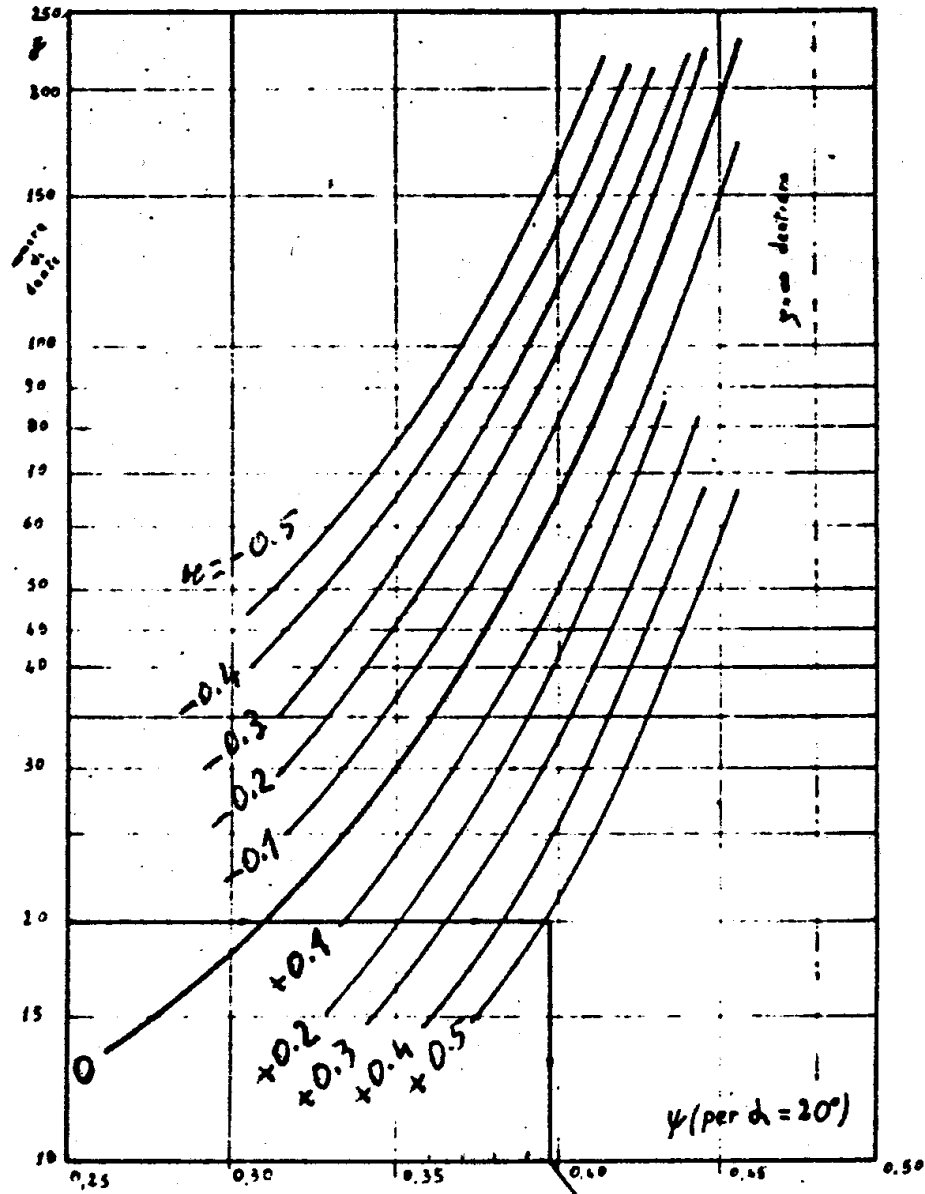
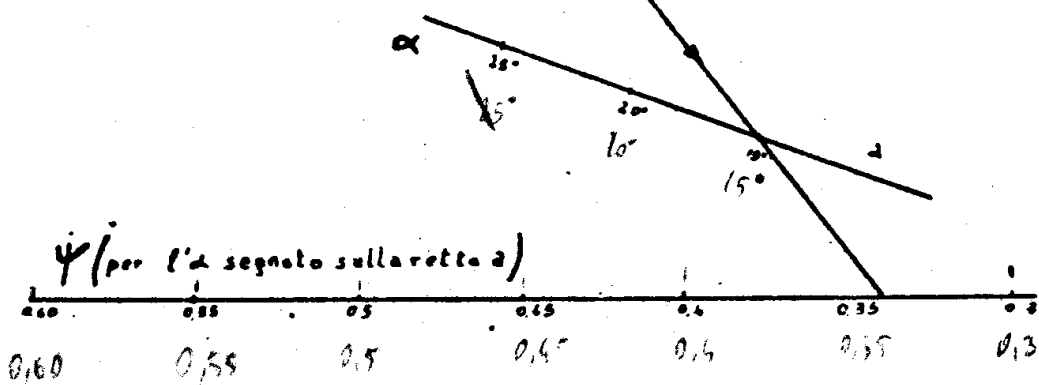


figura 19



$$F_{ta} = \sigma_{afo} \frac{\psi \psi'}{\xi_e \xi_i} b m$$

Inversamente, per un calcolo al progetto, assegnando il rapporto $k = \frac{b}{m}$ e ricordando che $F_t = \frac{2M}{mz}$ si ricava

$$m = \sqrt[3]{\frac{2 \xi_i \xi_e M}{\psi \psi' k z \sigma_{afo}}}$$

§

Calcolo ad usura

Si limita la pressione del contatto localizzato.

Secondo la teoria di Hertz, nel caso di cilindro in acciaio ad essi paralleli premuti con forza P, la massima pressione di contatto vale

$$p_0 = 0,418 \sqrt{\frac{P}{l} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) E} \quad (22)$$

dove l è la lunghezza della generatrice comune tra i due cilindri, ρ_1 e ρ_2 i raggi degli stessi cilindri, E il modulo di elasticità longitudinale.

Con la posizione

MATERIALE	trattamento	sigla UNI	Durezza, H (Kp/mm ²)	carico di rottura σ _r (Kp/mm ²)	tensione ammmissibile σ _{al} (Kp/mm ²)	Costante di Progetto ad usura K ₀ · $\frac{1}{\sigma}$ (Kp/mm ²)	
BRONZO FOSFOROSO	fusione in terra	B ₁₄	69	18	5	0,07	
	" in conchiglia	"	82	26	6	0,09	
	Centrifugazione	"	90	27	7	0,10	
	idem	"	115	32	8	0,12	
GHISE	Grigio	G ₁₈	170	18	3,5	0,1	
		G ₂₆	210	26	5	0,15	
	Malleabile	bonifica eventuale	—	220+300	35	7	0,17+0,28
		cuore bianconero	G _M 35	140	32	6	0,07
Sferoidale	" " "	G _M B + G _M 45	150-210	45	9	0,09+0,14	
	ricottura	—	220+260	55	10	0,14+0,2	
	bonifica	—	160+180 270+350	45+50 75+90	8 13	0,1 0,22+0,3	
ACCIAI NON LEGATI	in getti	—	125	45	9	0,05	
		—	145	52	10	0,065	
		—	170	60	12	0,09	
	Fucinato	—	A ₉ 42	125	48+50	11	0,06
		—	A ₉ 50	150	50+60	13	0,085
		—	A ₉ 60	175	60+70	15	0,11
		—	A ₉ 70	205	70+85	17	0,14
	21 C	bonifica	C30	180	60+70	15	0,11
		"	C40	210	70+80	17	0,15
		"	C50	240	80+90	19	0,2
		flammaturo	C40; C50	58 Rc	—	18	1,3
		tempra a induz. cementaz.	" "	55 "	—	30	1,6
" "	" "	57 "	42+66	15	0,7		
ACCIAI LEGATI	Cr	bonifica	40C4	250	75+90	20	0,22
		temp. ind. cianuraz. cementazione	15C3	57; 58 Rc 59 "	—	25 20	1,4 1
	Mn Si	bonifica	35MnS5	250	80+95	21	0,28
		flammaturo	"	55 Rc	—	25	1,2
		temp. a induz.	"	53 "	—	30	1,5
		cianurazione	"	54 "	—	25	1,2
	Cr Mn	bonifica	40CD4	310	95+110	22	0,3
		flammaturo	"	58 Rc	—	25	1,2
		temp. a induz.	"	60 "	—	30	1,4
		cianurazione	"	61 "	—	25	1,4
		nitrurazione	40CD4; 30CD12	600+700	90+110	25	0,8+1
	Mn Cr	bonifica	35MnCr	280	85 100	22	0,25
		" "	40MnCr	350	105 120	24	0,4
		cianurazione	35MnCr	57 Rc	—	30	1,4
		cementazione	12MnCr	61 "	65 90	20	1,4
		" " "	15MnCr	63 "	90 120	25	1,6
		" " "	18MnCr	" "	120 145	30	1,7
	Mn Cr Mn	bonifica	38MnCrMn	300	90 105	22	0,3
" "		35MnCrMn	520	175 200	38	0,8	
cementazione		19MnCrMn; 17MnCr	63 Rc	120 150	30	1,7	
Cr Mn	cementazione	10MnCr	60 Rc	80 110	22	1,3	
	"	20MnCr	62 "	100 130	26	1,6	
Cr V	temp. a induzione	50CrV4	60 Rc	—	28	2,3	
Cr Mn Al	nitrurazione	42CrAlD7	900	95 110	25	4,2	
	"	38CrAlD7	1050	" "	25	1,4	

$$p_r = \frac{1}{2} \frac{P}{l} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \quad (\text{pressione di rotolamento}) \quad (23)$$

la (22) diventa

$$p_0 = 0,418 \sqrt{2p_r E}$$

ed inversamente

$$p_r = \frac{p_0^2}{0,35 E}$$

Riferendoci ad un contatto in corrispondenza del centro istantaneo di rotazione O (figura 20), si ha per le quantità che compaiono nella (23)

$$P = F^* = \frac{\xi_i \xi_e}{\psi'} \frac{F_t}{\cos \theta} = 2 \frac{\xi_i \xi_e}{\psi'} \frac{M_1}{mz_1 \cos \theta} \quad (24)$$

$$l = b = \text{larghezza della ruota} \quad M_1 = \frac{F_t m z_1}{2} \quad (25)$$

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\lambda}{R_1 \sin \theta} = \frac{2}{mz_1 \sin \theta} \quad (26)$$

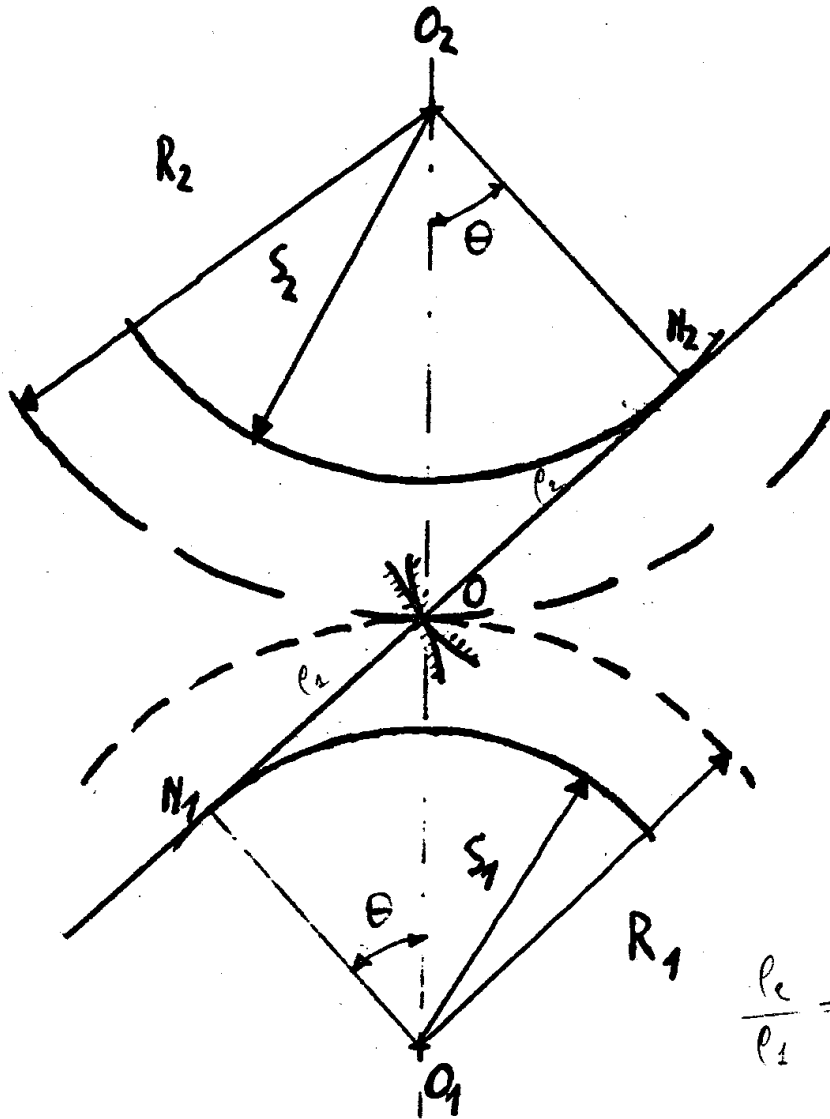


figura 20

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{1}{\tau}$$

$$\tau = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \tau$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{\tau}{R_1 \sin \theta} = \frac{2\tau}{m z_1 \sin \theta} \quad (27)$$

per cui, sostituendo le (24), (25), (26) e (27) nella (23), si ottiene

$$p_r = \frac{4 \xi_i \xi_e (1 + \tau) M_1}{\psi' m^3 z_1^2 k \sin 2\theta} \quad (28)$$

In un calcolo di verifica si può ricavare la forza periferica trasmissibile attraverso le (24) e (28), assegnato p_r (o p_o)

$$F_{tu} = \frac{\psi' p_r m^2 z_1 k \sin 2\theta}{2 \xi_i \xi_e (1 + \tau)}$$

mentre in un calcolo di progetto, sempre dalla (28), può trarsi

$$m = \sqrt[3]{\frac{4 \xi_i \xi_e (1 + \tau) M_1}{\psi' p_r z_1^2 k \sin 2\theta}}$$

Limiti per p_r (o p_o)

- A p_r si può dare, per ogni materiale, il limite di t bella dove è riportata la costante $\bar{k}_{p_o} = p_r/2$.

- Ponendo per la pressione limite

$$p_{o\bar{k}} = 0,7 \sigma_r$$

ricordando che per gli acciai può porsi

$$\sigma_r = 0,35 \text{ HB (HB durezza Brinell)}$$

si ha

$$(29) \quad p_{0q} = 0,25 \text{ HB per HB} < 400 \text{ kp/mm}^2$$

mentre se $\text{HB} > 400 \text{ kp/mm}^2$ si ritiene

$$(30) \quad p_{0l} = 0,20 \text{ HB}$$

I valori (29) e (30) si legano ad una durata $N_e = 10^8$ cicli.

Per durate N diverse, si possono assumere pressioni p_0 fornite dalla relazione

$$N = 10^8 \times \left(\frac{p_{0q}}{p_0} \right)^{20/3}$$

10 (0,200)
200

- Si può far riferimento alla relazione di Stribeck che porge

$$p_r = \frac{0,32 \left(\frac{\text{HB}}{100} \right)^2}{\left(\frac{60 \text{ nh}}{10^6} \right)^{1/3}}$$

dove

- n = numero di giri al minuto della ruota
considerata
- h = durata in ore

Si vede che per tale relazione, desiderando una eguale durata per rocchetto e ruota, essendo p_r uguale per entrambi, si avrebbe

$$\frac{(HB)_1^2}{n_1^{1/3}} = \frac{(HB)_2^2}{n_2^{1/3}}$$

cioè

$$\frac{H_2}{H_1} = \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^{1/6} = \tau^{1/6}$$

Si deduce cioè che la durezza dei denti della ruota può essere anche molto inferiore a quella dei denti del rocchetto.

(°) - Nota relativa alla pag. ~~44~~. 285

N. B. - I valori relativi alla ghisa valgono anche per ghise acciaiose e bronzi, perchè il modulo di elasticità di tutti questi materiali è circa lo stesso.

Per e possono adottarsi i valori seguenti:

- e = 0,0150 cm costruzione grossolana
- e = 0,0075 cm ruote lente in apparecchi di sollevamento;
- e = 0,0040 cm costruzione precisa; modulo < 4 mm;
- e = 0,0030 cm ingranaggi di automobile;
- e = 0,0012 cm ingranaggi di locomotive;
- e = 0,00075 cm denti rettificati, costruzione di alta precisione (ingranaggi di macchine utensili di precisione, di motori aeronautici ed automobilistici).

coe. ff. ξ_i di sovraccarico interno (Nieman)

