

NOTE SUGLI INNESTI MECCANICI

1) - Generalità e premesse

Gli innesti costituiscono una classe di collegamenti fissi amovibili, ovvero sono degli organi atti a collegare elementi (o sistemi o macchine) impedendone qualsiasi moto relativo ed ancora tali che l'accoppiamento possa essere sciolto senza inficiare la funzionalità del sistema.

Simili agli innesti sono quindi anche i giunti (rigidi, semielastici ed elastici); tuttavia, per questi l'eventualità dello scioglimento del collegamento è legata ad eventi straordinari (manutenzioni, riparazioni, sostituzioni); al contrario, per gli innesti detta possibilità è relativa ad eventi che si ripetono frequentemente durante la vita dell'elemento ed è quindi legata allo stesso esercizio della macchina.

Connessa con tale caratteristica l'importanza, per un corretto studio degli innesti, che assume l'analisi del transitorio di macchina, ovvero del moto vario di durata finita, che si verifica in corrispondenza di ogni inserimento o disinserimento dell'innesto; durante tale fase, infatti, oltre ad eventuali sovraccarichi dinamici, si verificano dissipazioni di energia che, oltre a compromettere eventualmente la statica dell'innesto, ne limitano in ogni caso la durata.

Per tale motivo è utile analizzare brevemente le ca-

ratteristiche del transitorio collegato con l'innesto o il disinnesto di simili sistemi.

Riferiamoci, a puro titolo esemplificativo, alla figura 1 a), nella quale sono schematizzati due sistemi meccanici A e B, costituiti ciascuno da un albero e da un disco.

Il sistema B risulti inizialmente disaccoppiato dal sistema A e fermo, ovvero sia $\omega_b = 0$ per $t \leq 0$; sia ancora J_b il momento d'inerzia del sistema stesso ed M'_R il momento resistente che si opporrebbe al moto di B.

Il sistema A, dal canto suo, caratterizzato da un momento d'inerzia J_a e da coppie resistenti M'_R esplicitate dai suoi vincoli, sia assoggettato ad una coppia motrice M_m ; a sistemi disaccoppiati, la legge di moto di A è quindi determinabile attraverso l'equazione di equilibrio dinamico dello stesso A (D'Alembert) nella forma

$$M_m - M'_R = J_a \frac{d\omega_a}{dt}$$

Se supponiamo che per $t \leq 0$ risulti $\omega_a = 0$, ovvero che il sistema A si trovi inizialmente in condizioni di regime, l'equazione sopra indicata si riduce alla sua forma più semplice

$$M_m - M'_R = 0$$

Sin qui i due sistemi sono stati considerati indipendenti tra loro; supponiamo quindi che all'istante $t=0$ essi si vengano accoppiati; ciò può avvenire, nell'esempio di cui in fig. 1 b), spostando il sistema B ed esercitando un carico assiale di collegamento.

In tal caso, non potendo sussistere, per l'inerzia dei sistemi collegati, salti di velocità, occorre ammettere che per un certo tempo sia ω_a che ω_b varino con continuità; risultandone un moto vario relativo tra i due sistemi sorgeranno nuove azioni dissipative in corrispondenza delle superfici di collegamento.

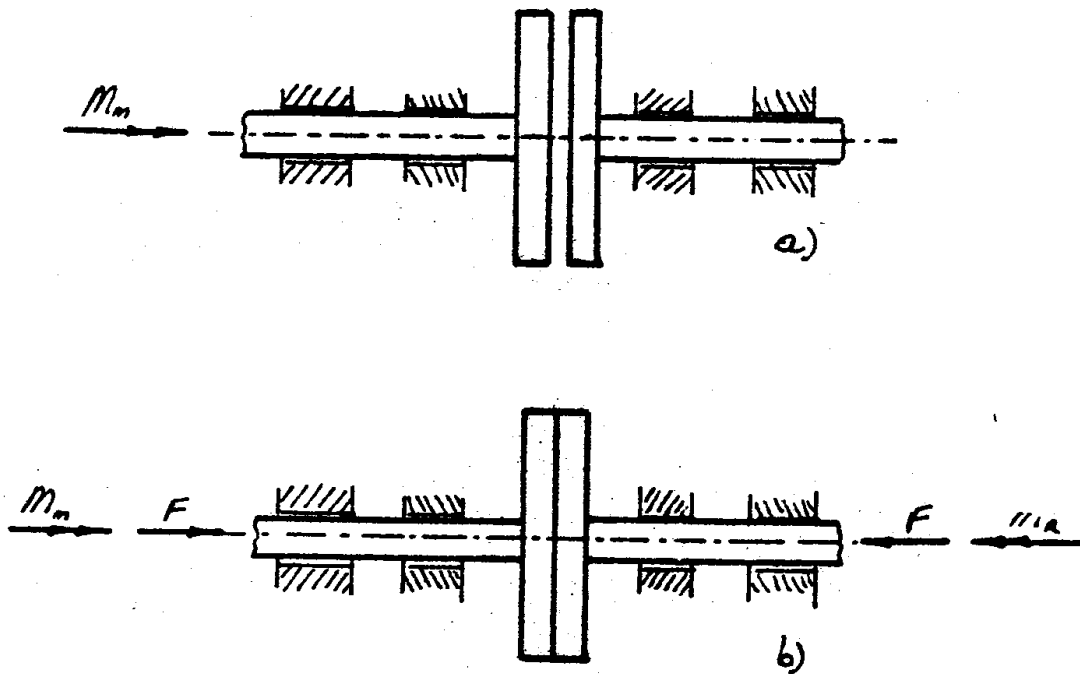


figura 1

Nell'esempio di cui in figura 1, a tale moto relativo corrisponde una coppia dissipativa addizionale, dovuta alle componenti tangenziali (d'attrito) degli sforzi esplicanti tra i dischi in presenza del carico assiale applicato.

Pertanto, detto M_d tale momento resistente aggiuntivo, l'equazione d'equilibrio dinamico del sistema (A-B), nella forma

$$M_m - M'_R - M''_R - M_d = J_a \frac{d\omega_a}{dt} + J_b \frac{d\omega_b}{dt} \quad (1)$$

non è sufficiente da sola per la risoluzione del problema, essendo due (ω_a ed ω_b) le funzioni incognite che in essa compaiono.

A questa occorre aggiungere un'altra equazione che, ad esempio, può essere di tipo energetico,

$$L_m - L'_R - L''_R - L_d = L_{Ia} + L_{Ib} \quad (2)$$

ove i singoli termini rappresentano i lavori compiuti dalla coppia motrice (L_m) da quelle resistenti (L'_R ed L''_R , L_d) e dai carichi inerziali, rispettivamente per i due sistemi A (L_{Ia}) e B (L_{Ib}).

Senza voler qui dilungarci sui problemi che insorgono nella integrazione di tali equazioni, osserviamo che la (1) si presta a numerose considerazioni, tra le quali le più rilevanti sono:

1) - Nulla si è detto circa i metodi e le leggi con le quali si rendono solidali i due sistemi, e ciò perchè essi variano entro campi assai rilevanti. Ad esempio, per il caso di cui in figura 1 a) e b), si potrebbe applicare un carico assiale F , a seguito del quale insorgono forze tangenziali di attrito che, al di là di un valore F^* , da ricercare di volta in volta, sono in grado di trasmettere tutta la coppia erogata M_m . Ne consegue che, qualora la forza F^* applicata sia inferiore alla F , le due flangie non risultano solidali, ma sussiste tra loro uno scorrimento relativo; pertanto, anche nella fase di regime finale del sistema, e non solo nel transito -

rio, riesce ancora $\omega_a \neq \omega_b$.

Qualora, al contrario, la forza F sia sufficiente, si perviene ad una condizione finale per la quale risulta $\omega_a = \omega_b$; tuttavia, in generale tale velocità non coincide con quella posseduta dal sistema A prima dell'accoppiamento.

2) - Nulla si è detto circa le caratteristiche delle coppie resistenti M_R ed M_R'' . Queste in realtà possono essere dipendenti, ad esempio, dalla stessa velocità, e quindi influenzare la dinamica del sistema, figurando nell'equazione (1) non come costanti, ma come funzioni più o meno complesse.

3) - Infine, occorre precisare che lo stesso M_m non risulta in genere costante rispetto ai parametri cinematici di funzionamento. Prescindendo dall'astrazione delle "sorgenti infinite d'energia" che possono erogare qualsiasi coppia a qualsiasi velocità, e per le quali pertanto non sussistono problemi, notiamo che in effetti le reali macchine motrici, costituiscono sorgenti "limitate" d'energia, per le quali ad ogni regime corrisponde una ben precisa coppia erogabile. In tal caso, durante il transitorio la coppia stessa varia, come può vedersi schematicamente anche dall'esempio di cui in fig. 1 a) e b), per il quale all'istante $t = 0$ (tempo di accoppiamento o inizio transitorio) riesce $M_m = M_R'$. Durante il transitorio, poi M_m deve equilibrare M_R , M_R'' , M_d , M_{Ia} , M_{Ib} e quindi deve incrementarsi, per poi ridursi, nel nuovo regime a $M_m = M_R' + M_R''$.

Da ciò discende che nel transitorio la nuova M_m presenterà in genere un massimo, e che il suo valore finale non coincide con quello iniziale. Ne consegue che la stessa velocità finale risulta in generale diversa da quella iniziale.

2) - Classificazione degli innesti

Come si è detto nelle pagine che precedono, la completa analisi dei transitori di innesto e di disinnesto è sovente cosa assai ardua; d'altro canto, se è vero che ciascun tipo di innesto influenza, per le proprie caratteristiche di progetto, l'andamento di tali transitori, è pur vero che questi ultimi sono legati anche a tutti gli altri elementi costitutivi del sistema e che pertanto lo stesso collegamento, se utilizzato in condizioni o in macchine diverse, può dar luogo a transitori differenti.

Per tali motivi, un approccio che voglia essere solo di larga massima per tale categoria di collegamenti, tra lasciando l'analisi dinamica del sistema, può riportarsi direttamente alle condizioni di regime che si instaurano al termine di detti transitori. Ci si può quindi ricondurre ad alcuni casi di particolare evidenza e da questi derivare tutti gli altri; così si può avere che:

a) - il sistema B viene effettivamente posto in rotazione da A raggiungendosi condizioni di regime caratterizzate dall'essere $\omega = \omega_a = \omega_b$, in condizioni cinematiche di A più o meno variate rispetto a quelle iniziali;

b) - il sistema B non viene posto in rotazione, mentre A rallenta fino ad arrestarsi ($M_R'' + M_R' > M_{m \max}$), ovvero sino ad una nuova velocità che, in dipendenza dei carichi agenti, permane inalterata nel tempo.

Nel primo caso si parla di innesti motore, o degli innesti propriamente detti; nel secondo di innesti freno o, più brevemente di freni; come si evince dalla classificazione operata, non sempre un innesto freno viene utilizzato per arrestare un moto, ma, in molte categorie di impianti, solo per variarne il regime; ad esempio, per mantenere costante una velocità di una macchina, che, in assenza di freno, tenderebbe naturalmente ad accelerare.

Se come principio freni ed innesti costituiscono una medesima classe di collegamenti, i rispettivi schemi costruttivi possono essere anche molto diversi tra loro; in ogni caso, i tipi principali, di struttura essenzialmente meccanica (si trascurano, ad esempio, i freni a correnti parassite, o gli innesti fluidodinamici) possono essere ricondotti ad alcune categorie fondamentali:

1) - innesti rigidi. Sono quelli per i quali il carico di collegamento viene applicato istantaneamente con tutto il suo valore e per i quali in presenza di elementi perfettamente rigidi, la velocità dei due sistemi si eguaglierebbe istantaneamente.

In presenza di elementi elastici, la durata del transitorio non viene in effetti annullata poichè nessuno dei due sistemi, per la propria inerzia, può subire variazioni discontinue di velocità. Si determinano pertanto delle oscillazioni torsionali in entrambi i sistemi, ad andamento periodico smorzato, attraverso le quali si tende al nuovo stato di regime, che si raggiunge dopo un intervallo di tempo finito.

Rimandando a trattazioni specifiche lo studio di tali oscillazioni, qui basta ricordare che i risultanti sovraccarichi dinamici sono in genere tanto gravosi da impedire un siffatto tipo di collegamento in presenza di rilevanti coppie o velocità, rimanendo pertanto tale tipo di collegamento confinato al campo delle piccole potenze. In genere essi sono caratterizzati da elementi dentati (radialmente o frontalmente) ovvero da elementi a pioli; a tale categoria appartengono tutti gli innesti motore rigidi (Pomini, Sulzer, Hildebrandt) come anche i freni ad arpionismi o a denti.

2) - innesti per attrito, costituenti la quasi totalità degli innesti, ed in ogni caso quelli utilizzati negli impianti di potenza. Sono caratterizzati, in contrapposizione a

quelli rigidi già citati, da un'estrema dolcezza di innesto, da tempi di transitorio regolabili e da rilevanti coppie trasmissibili; in tale categoria sono compresi gli innesti piani, a dischi, ovvero quelli conici o cilindrici, i freni a ceppi, a nastro ed a dischi.

3) - Alcuni innesti di tipo particolare sono poi costituiti dalle ruote libere o innesti di sopravanzo, i quali sono caratterizzati dall'inserimento del collegamento per un verso di rotazione relativa dei due sistemi motore e condotto, e dallo scioglimento automatico del collegamento per l'altro verso di rotazione.

4) - Menzione particolare meritano poi i limitatori di coppia, non per caratteristiche particolari del collegamento, ma per la propria funzione, che prevede per tali organi, da comprendere in ogni caso tra gli innesti per attrito, lo scioglimento del collegamento in presenza di sovraccarichi prestabiliti.

In tali categorie, e principalmente in quella degli innesti per attrito, si possono comprendere tutti i diversi sistemi di frizioni o di freni, i quali molto spesso non sono distinguibili se non per il compito assolto nell'impianto, ovvero per le caratteristiche di carico.

In ogni caso, lo studio dei tipi principali di innesti per attrito può essere condotto in maniera del tutto parallela, in speciale riferimento alle caratteristiche delle superfici di collegamento utilizzate. Potremo così distinguere:

1) - Innesti assiali, tali che la chiusura del collegamento avviene mediante l'applicazione di carichi assiali, e caratterizzati da superficie di accoppiamento piane (semplici o multiple) ovvero coniche.

2) - Innesti cilindrici, per i quali le superficie di accoppiamento risultano cilindriche ed il collegamento av-

viene attraverso l'applicazione di carichi radiali.

3) - Innesti a nastro, per i quali si ricorre ad elementi elicoidali flessibili o comunque deformabili; tali sono ad esempio i diffusissimi freni a nastro e gli innesti a molla, peraltro oggi scarsamente utilizzati.

4) - Freni a dischi, di caratteristiche del tutto particolari, per i quali la frenatura viene ottenuta sfruttando l'effetto di pinzatura di piastre circolari da parte di elementi opportunamente sagomati caricati assialmente; in senso lato, a questi possono essere collegati tutti i freni agenti per pinzatura, di larga diffusione negli impianti di sollevamento.

3) - Innesti assiali

Tale categoria comprende, come si è detto, quegli innesti (motore o freno) ad attrito, per i quali la chiusura viene ottenuta mediante l'applicazione di carichi assiali.

Nulla vieta, evidentemente, di assegnare pertanto alle superfici di collegamento forma qualsiasi, purchè tali che, come si vedrà più oltre, la distribuzione di carico sulle stesse ammetta una risultante assiale; tuttavia, per le caratteristiche di affidabilità e di semplicità di esecuzione, le superfici oggi impiegate sono esclusivamente quelle piane o coniche.

Ciò naturalmente circoscrive il campo di indagine, tanto più se si ricorda che una superficie piana può essere considerata come una conica di semiapertura pari a 90°. E' pertanto sufficiente soffermarsi soltanto sugli innesti assiali a superficie conica.

Tale tipo di innesto sarà quindi caratterizzato da due elementi coassiali delimitati l'uno internamente e l'altro esternamente da superfici coniche di uguale semiapertura.

ra e collegati ai due sistemi motore e condotto. Mediante l'applicazione di un carico assiale di chiusura dello accoppiamento, si desta, per ciascun elemento, un sistema di sforzi al contorno (esplicati direttamente dall'altra superficie conica) estrinsecantesi come una distribuzione di pressione.

Così caricati i due elementi, ad un moto relativo qualsiasi si opporrà un altro sistema di sforzi al contorno, esplicati da ciascun elemento (considerato come vincolo) sull'altro, sistema ricavabile dalla stessa distribuzione di pressione assegnata attraverso un coefficiente che al più può eguagliare quello fornito dall'ipotesi coulombiana sull'attrito.

Attesa tale ipotesi, il nuovo sistema di carico risulterà diretto, per ogni elemento infinitesimo di superficie, lungo la tangente alla traiettoria relativa, con verso tale da contrastare il moto.

Poichè, per ogni elemento infinitesimo di ampiezza dA , detta p la pressione media agente sull'elemento ed f il coefficiente di attrito coulombiano, il massimo sforzo resistente risulta fornito da $fpdA$, la distribuzione di pressione data è tale da impedire i moti nella direzione assegnata, dovuti a carichi che possano essere equilibrati al più da detta distribuzione di sforzi tangenziali $fpdA$.

Inoltre, ritenendo equilibrato il sistema ed applicandosi un carico di chiusura assiale, (evitandosi carichi eccentrici che sollecitino in maniera disuniforme le superfici di collegamento) attesa l'assialsimmetria delle superfici, anche la distribuzione di pressione risulterà assialsimmetrica.

Discende poi ancora che la massima coppia che potrà essere equilibrata dal collegamento e quindi che non indurrà moti relativi tra le superfici, e quindi ancora la massima coppia trasmissibile dall'innesto, sarà quella corrispondente proprio alla distribuzione di sforzi tan

genziali pari ad $fpdA$.

Per formulare analiticamente il problema del calcolo dell'innesto, tralasciamo per ora la possibilità di una traslazione relativa e poniamoci dunque in condizioni di regime e di incipiente moto rotatorio relativo tra gli elementi accoppiati, proponendoci di determinare in tale assetto la massima coppia trasmissibile dall'innesto.

Se consideriamo (figura 2) due superfici coniche di semiapertura α , tra le quali si esercita una pressione p ,

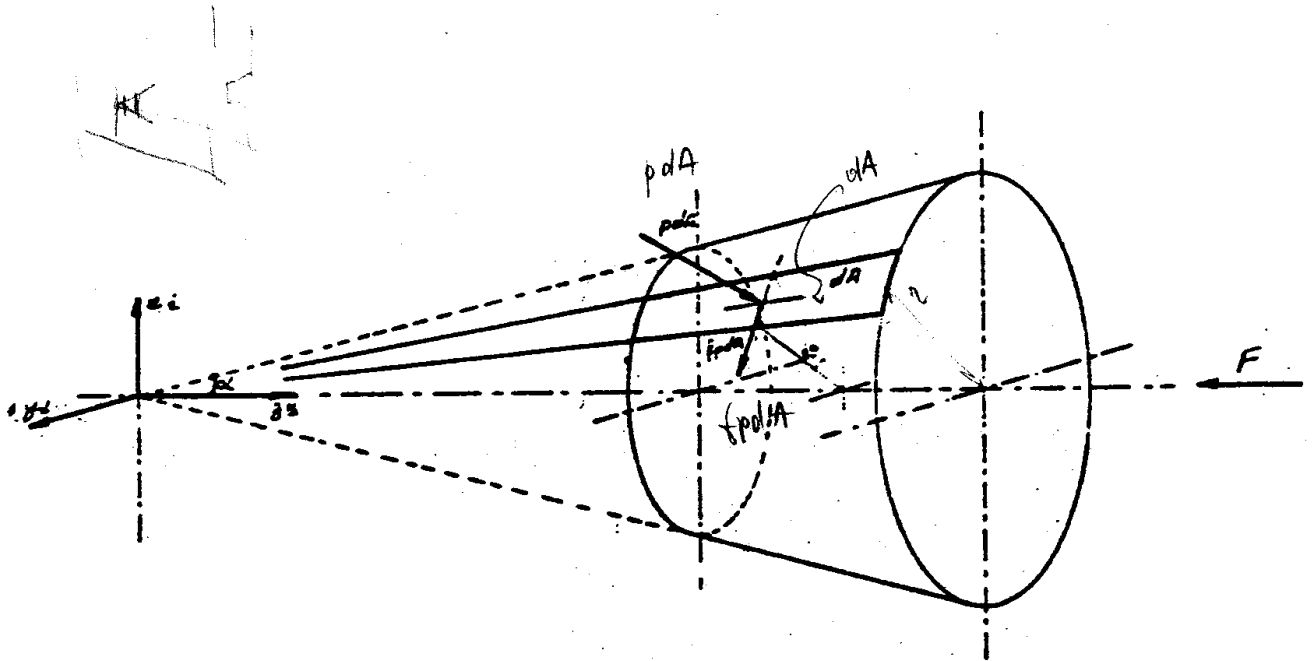


figura 2

comunque definita, alla rotazione relativa delle due superfici si oppone una coppia che, per un elemento infinitesimo, vale

$$dM' = fp r dA$$

essendo per la superficie conica

$$dA = \frac{r}{\sin \alpha} dr d\theta$$

e complessivamente

$$M' = \int_A f p r dA = \frac{f}{\sin \alpha} \int_{R_i}^{R_e} dr \int_0^{2\pi} p r^2 d\theta$$

Nell'ipotesi che p abbia distribuzione assialsimmetrica, si ha

$$M' = \frac{2\pi f}{\sin \alpha} \int_{R_i}^{R_e} p r^2 dr$$

Pertanto tale accoppiamento permette di trasmettere una coppia $M = -M'$.

Occorre ora determinare il carico assiale che consente di instaurare la distribuzione di pressione p . A tale scopo, consideriamo che la generica forza elementare e splicantesi su di un elemento di superficie dA ammette una componente assiale

$$dF' = p \sin \alpha dA$$

Tale sistema di forze presenta risultante assiale

$$F' = 2\pi \int_{R_i}^{R_e} p r dr$$

e pertanto per stabilire l'equilibrio occorre applicare dall'esterno un carico assiale $F = -F'$.

Per integrare le equazioni introdotte, occorre esplicitare ancora la funzione $p = p(r)$.

Possono farsi due ipotesi:

1) - $p = \text{cost.}$, da cui segue

$$M' = \frac{2\pi f p}{\sin \alpha} \int_{R_i}^{R_e} r^2 dr = \frac{2\pi f p}{\sin \alpha} \frac{R_e^3 - R_i^3}{3} = \frac{2\pi f}{\sin \alpha} p R_i^3 \frac{K^3 - 1}{3}$$

essendosi introdotto il rapporto adimensionale $K = R_e/R_i$;

$$F' = 2\pi p \int_{R_i}^{R_e} r dr = \pi p (R_e^2 - R_i^2) = \pi p R_i^2 (K^2 - 1)$$

Ricavando p , è possibile legare M' ed F' , riuscendo

$$p = \frac{3}{2} \frac{M' \sin \alpha}{\pi f R_i^3 (K^3 - 1)} = \frac{F'}{\pi R_i^2 (K^2 - 1)}$$

$$M' = \frac{2}{3} f \frac{F'}{\sin \alpha} R_i \frac{K^3 - 1}{K^2 - 1} = f \frac{F'}{\sin \alpha} \frac{2}{3} R_i \left(1 + \frac{K^2}{1 + K} \right)$$

2) - $pr = C = \text{cost.}$ (ipotesi del Reye), da cui segue

$$M' = \frac{2\pi f C}{\sin \alpha} \int_{R_i}^{R_e} r dr = \frac{\pi f C}{\sin \alpha} R_i^2 (K^2 - 1)$$

$$F' = 2\pi C \int_{R_i}^{R_e} dr = 2\pi C R_i (K - 1)$$

Ricavando C, si ha

$$C = \frac{M' \sin \alpha}{\pi f R_i^2 (K^2 - 1)} = \frac{F'}{2\pi R_i (K - 1)}$$

$$M' = f \frac{F'}{\sin \alpha} R_i \frac{K^2 - 1}{2(K - 1)} = f \frac{F'}{\sin \alpha} R_i \frac{1 + K}{2}$$

In tale ipotesi, fissato il valore massimo p_i della pressione ammissibile, dato da

$$p_i = \frac{C}{R_i} = \frac{M \sin \alpha}{\pi f R_i^3 (K^2 - 1)}$$

la pressione minima vale

$$p_e = p_i \frac{R_i}{R_e} = \frac{p_i}{K} = \frac{M \sin \alpha}{\pi f R_i^3 K (K^2 - 1)}$$

$K = \frac{p_i}{p_e}$ $R_i = \frac{r_i}{r_e}$

Per un corretto ed uniforme sfruttamento dell'innesto, occorre imporre che la pressione non vari di molto, ovvero che sia $K = p_i/p_e$ prossimo all'unità ed ancora che

$$\frac{dp}{dr} = - \frac{C}{r^2}$$

sia molto piccolo, ovvero ancora, che C riesca prossimo a 0; ma, essendo

$$C = \frac{M \sin \alpha}{\pi f R_i^2 (K^2 - 1)}$$

risulta

$$K^2 = 1 + \frac{M \sin \alpha}{\pi f R_i^2 C}$$

che nel piano K, R_i è un'iperbole e, dovendo essere C molto piccolo, fornisce, per $K \rightarrow 1$, $R_i \rightarrow \infty$. Tuttavia, per motivi di ingombro, si preferisce ridurre R_i , sfruttandosi in tal modo l'innesto in maniera diseguale. Si può procedere ad ottimizzare i valori di K ed R_i introducendo ulteriori condizioni, ad esempio limitazioni di peso, di momento di inerzia, ovvero di equilibrio termodinamico.

Indipendentemente dalla funzione $p = p(r)$ considerata, quanto sopra consente di determinare, in funzione della coppia da esercitarsi, il carico assiale di chiusura da applicare in condizioni di regime, ovvero in assenza di spostamenti relativi.

Tali scorrimenti intervengono nelle manovre di innesto e di disinnesto, durante le quali si esercita una forza d'attrito elementare $fpdA$ che è diretta lungo la tangente alla traiettoria relativa e di senso tale da opporsi al moto.

Detto β l'angolo formato dalla direzione orientata di tale tangente con la generatrice del cono passante per il punto considerato, le azioni superficiali complessivamente esercitate in direzione assiale sul generico elemento infinitesimo valgono

$$dF'_{\text{inn}} = pdA \sin \alpha + fpdA \cos \beta \cos \alpha = (1 + f \cos \beta \operatorname{ctg} \alpha) pdA \sin \alpha$$

la cui risultante vale

$$F'_{\text{in}} = (1 + f \cos \beta \operatorname{ctg} \alpha) \int_A pdA \sin \alpha$$

Ma

$$\int_A pdA \sin \alpha = F'$$

da cui

$$F'_{\text{in}} = F' (1 + f \cos \beta \operatorname{ctg} \alpha)$$

e quindi il carico da applicare per l'innesto è fornito da

$$F_{\text{in}} = F (1 + f \cos \beta \operatorname{ctg} \alpha)$$

In effetti, se l'innesto avviene da fermo, $\beta = 0$, e quindi

$$F_{in} = F(1 + fctg\alpha)$$

Se invece l'innesto avviene durante il moto, riesce $\beta \neq 0$; tuttavia, risultando $tg\beta$ dipendente dal rapporto tra le velocità di rotazione relativa e di avanzamento assiale, riesce di norma $\beta \cong \pi/2$, ossia

$$F_{in} \cong F$$

ossia non v'è alcuna differenza, in buona approssimazione, tra la forza di chiusura all'innesto ed a regime. Per il disinnesto, parimenti, se esso avviene in moto è sempre $\beta \cong -\pi/2$, e quindi, se si annulla F , il sistema reagisce spontaneamente in modo da annullare F' , vale a dire che la campana mobile trasla spontaneamente, sotto la forza F' , assicurando il disinnesto.

In ultimo, durante la manovra di disinnesto da fermo, $\beta = \pi$ e pertanto la risultante delle forze superficiali trasmesse vale

$$F'_{dis} = F'(1 - fctg\alpha)$$

Se il termine in parentesi risulta > 0 , tale forza è diretta nel senso dei diametri crescenti e, pertanto, al cessare di F , si ha il disinnesto automatico. Se al contrario, il termine in parentesi risulta < 0 , la risultante

F'_{dis} risulta diretta in senso tale da favorire l'accoppiamento e, pertanto, per assicurare il disinnesto occorre intervenire dall'esterno. Tale condizione di reversibilità dipende solo dalla geometria delle superfici e dal materiale utilizzato, e la reversibilità risulta assicurata per $\alpha > \arctg f = \varphi$.

In quanto precede, si è ipotizzato $\beta = \text{cost.}$, mentre in realtà, come può mostrarsi agevolmente, tale angolo varia dipendendo dalla geometria della superficie e dal rapporto V_t / V_a tra le velocità caratterizzanti il moto rototraslatorio.

Infatti (fig. 3), il raggio vettore \underline{R} proiettante dall'origine un generico punto P di un'elica descritta su di una superficie conica di apertura α , nel riferimento levogiro con origine nel vertice della superficie, e che vede l'asse \underline{zK} diretto lungo l'asse in direzione dei diametri crescenti, detta θ la anomalia nella sezione retta, è fornito da

$$\underline{R} = z \text{tg} \alpha \cos \theta \underline{i} + z \text{tg} \alpha \sin \theta \underline{j} + z \underline{K}$$

riuscendo

$$z = V_a t$$

$$\theta = \omega t$$

nell'ipotesi che i moti di accostamento e di rotazione siano entrambi uniformi.

Detto ds l'elemento d'arco dell'elica, riesce

$$\frac{ds}{dt} = \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} = \frac{V_a}{\cos \alpha} [1 + \theta^2 \sin^2 \alpha]^{1/2}$$

e pertanto il versore della tangente all'elica riesce definito da

$$\underline{t} = \frac{d\underline{R}}{ds} = \frac{d\underline{R}}{dt} \frac{1}{ds/dt} =$$

$$= [\sin\alpha(\cos\theta - \theta\sin\theta)\underline{i} + \sin\alpha(\sin\theta + \theta\cos\theta)\underline{j} + \cos\alpha\underline{K}] [1 + \theta^2 \sin^2\alpha]^{1/2}$$

Dal canto suo, la generatrice annette un versore

$$\underline{g} = \frac{\underline{R}}{|\underline{R}|}$$

e, risultando

$$|\underline{R}| = \frac{v_a t}{\cos\alpha}$$

si può verificare essere

$$\underline{g} = \sin\alpha\cos\theta\underline{i} + \sin\alpha\sin\theta\underline{j} + \cos\alpha\underline{K}$$

L'angolo β , formato tra \underline{t} e \underline{g} , riesce dunque fornito dalla relazione

$$\cos\beta = \underline{t} \cdot \underline{g} = \frac{1}{(1 + \theta^2 \sin^2\alpha)^{1/2}}$$

come può essere verificato eseguendo i relativi computi. Pertanto, essendo

ha tra gli altri il contatto "superficiale" o di "combaciamento" quando esso è esteso a tutta una superficie. In tal caso le superficie coniugate devono essere identiche: es. contatto tra perno e cuscinetto nei normali cuscinetti a strisciamento.

Stante tutto quanto premesso si definiscono coppie rigide elementari o "inferiori" le coppie cinematiche rigide, indipendenti, che presentano contatti di combaciamento: le superficie coniugate di esse, che sono quindi identiche, devono presentare la proprietà di potere scorrere su se stesse senza deformarsi e inoltre devono lasciare ai membri accoppiati un solo grado di libertà. Fra tali superficie si classificano quelle elicoidali. Nasce dunque la coppia elicoidale (moto relativo elicoidale). A tale categoria appartiene l'accoppiamento vite -dado e, in generale, vite-madrevite.

La coppia elicoidale, come altre coppie (non elicoidali) sulle quali s'è taciuto, realizza un moto rigido elementare, quello elicoidale appunto. Essa gode della proprietà di essere reciproca, ossia, se nella coppia si fissa uno dei membri, ad es. A, il moto consentito all'altro membro B è identico a quello permesso ad A quando si fissa B.

REGIME ASSOLUTO - RENDIMENTO NEL REGIME ASSOLUTO

Si distinguono le forze applicate agli organi dall'esterno dalle azioni e reazioni mutue degli organi stessi. Le forze esterne si distinguono in motrici e resistenti a seconda che il loro senso è tale da favorire o ostacolare il moto degli organi ai quali sono applicate.

la geometria della superficie (tramite α) e dal rapporto tra le velocità caratterizzanti il moto elicoidale. Esso non risulta dunque costante, riuscendo

$$\frac{d\beta}{dr} = \frac{\omega \cos \alpha}{v_a \left[1 + \left(\frac{\omega \cdot r \cos \alpha}{v_a} \right)^2 \right]}$$

tuttavia essendo in genere K non troppo diverso dall'unità, si può ritenere con buona approssimazione $\beta = \text{cost}$ in calcoli di massima dell'innesto.

4) - Materiali impiegati e cenni sul calcolo ad usura

I materiali che si possono utilizzare per le superfici d'innesto debbono possedere numerosi requisiti, tra i quali ricordiamo: elevato coefficiente d'attrito - buona resistenza meccanica a schiacciamento e ad usura - e levata temperatura di liquefazione - assenza della ten- denza all'incollaggio a temperatura elevata.

Sono stati pertanto abbandonati i vecchi accoppiamenti di legno o cuoio su ghisa od acciaio, introducendo gli accoppiamenti ghisa su ghisa o acciaio, ed acciaio su acciaio. Tuttavia i materiali che oggi più comunemente si impiegano sono:

a) materiali sinterizzati, a base di polvere di grafite al bronzo miscelata con diversi metalli ed additivi non metallici, che durante il procedimento di sinterizzazione vengono saldati contemporaneamente su dischi in acciaio; sono elementi ottimi sotto tutti gli aspetti, ma tuttavia risultano sufficientemente costosi.

b) Materiali a base di amianto, tra i quali i cosiddetti "ferodi" anch'essi ottimi ed in ogni caso più economici dei precedenti. Caratteristica fondamentale è la presenza dell'amianto, o asbesto, un silicato complesso di magnesio, che viene reperito in cava in due strutture fondamentali, a fibra lunga o corta.

Con l'amianto a fibra lunga si ottengono i cosiddetti amianti tessuti, che possono essere filati unitamente a fili sottilissimi di ottone o zinco e saturati con resine sintetiche o asfalti resistenti al calore. Commercialmente vengono forniti in nastri dotati di buona flessibilità, per cui ben si adattano a rivestire superfici curve.

Con l'amianto a fibra corta, più comune del precedente, si ottengono i cosiddetti amianti agglomerati, in genere più rigidi dei precedenti, ma le cui proprietà dipendono dal processo di produzione seguito (estrusione, laminazione, ecc.).

Il parametro fondamentale che caratterizza i materiali per frizione è costituito dal coefficiente d'attrito, il quale a sua volta dipende dalla pressione, anche se in ridotta misura, dalla velocità e dalla temperatura.

1) - Dipendenza dalla velocità. Occorre ricordare l'esistenza di due valori differenti dal coefficiente d'attrito, quello di primo distacco e quello di strisciamento. A seconda dei casi occorre prendere in esame l'uno o l'altro; ad esempio si considererà il coefficiente di primo distacco per gli innesti di sicurezza (limitatori di coppia) per i freni di stazionamento, o per valutare le forze di innesto da fermo. Occorre considerare invece il coefficiente di attrito di strisciamento in freni di discesa o di traslazione e nel valutare le forze di innesto in moto.

2) - Dipendenza dalla temperatura. Il coefficiente d'attr

trito mostra in generale una variazione con la temperatura del tipo indicato in fig. 4; per quanto concerne il tratto decrescente, esso è attribuito alla decomposizione di alcune resine imbibenti, che liquefano formando un film di lubrificante tra le superfici accoppiate. Per spiegare il secondo tratto ascendente, è particolarmente utile il diagramma dell'usura in funzione della temperatura (fig. 5), il quale mostra che, a partire da temperatu

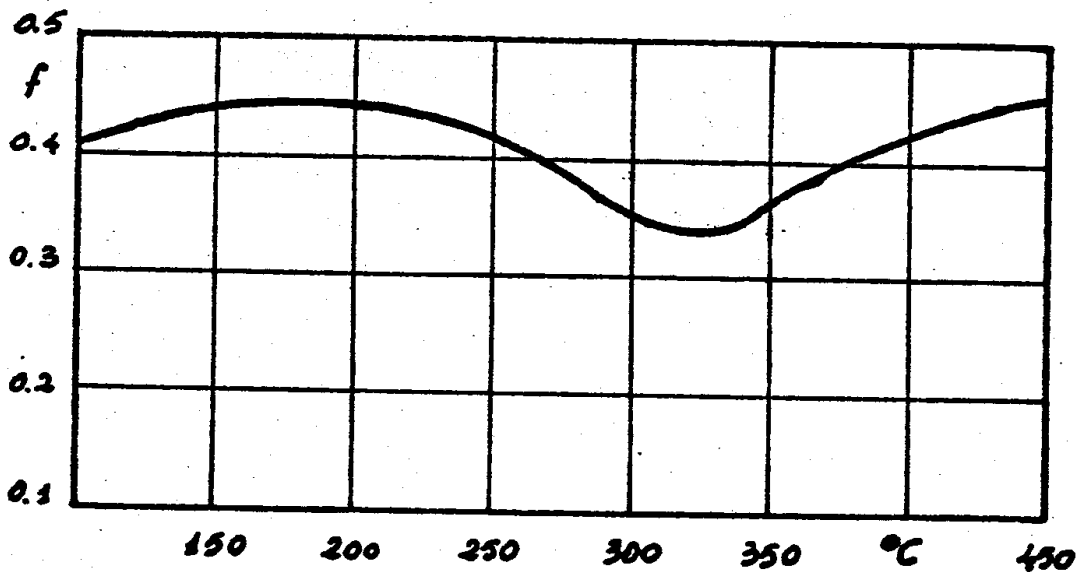


figura 4

re dello stesso ordine di grandezza di quella cui corrisponde il coefficiente di attrito minimo, si hanno forti incrementi dell'usura, che attinge valori tali da mettere fuori uso o disintegrare in breve tempo il ferodo. Pertanto l'aumento del coefficiente di attrito in questo campo è da attribuire in parte alla maggiore resistenza dovuta al distacco di particelle macroscopiche di ferodo, in parte all'effetto cuneo che le stesse esercitano tra le superfici a contatto.

Ciò lascia intravedere come sia necessario eseguire, oltre a quelli già esaminati, altri procedimenti di calcolo per le frizioni e freni, ricorrendo a criteri di pro-

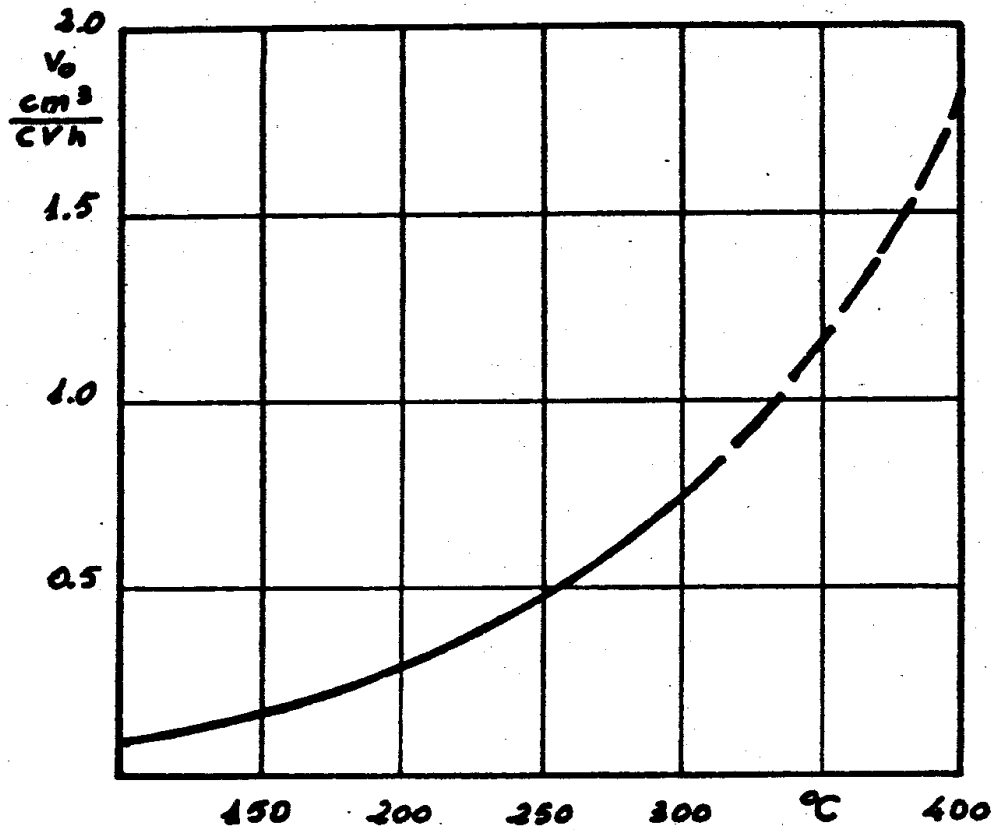


figura 5

getto ad usura e termico, entrambi basati sulla determinazione del lavoro dissipato per attrito durante l'innesto.

Per indicare schematicamente il procedimento da seguire, indichiamo con M il momento motore, con M_u la coppia trasmessa al sistema condotto, con M_d il momento resistente d'attrito esplicitantesi in corrispondenza delle superfici di contatto, con ω ed ω' le velocità angolari rispettivamente dell'albero motore, che riterremo costante, e dell'albero mosso, che porremo nulla per $t=0$.

In generale, dobbiamo supporre che il momento M vari a partire da incerto valore iniziale; possiamo altresì ritenere che per un certo intervallo $0 \leq t \leq t_0$ risulti

$$\eta = \frac{L_u}{L_m} = \frac{L_m - L_r}{L_m} = 1 - \frac{L_r}{L_m} \quad (4)$$

La differenza $1 - \eta = L_r/L_m$ caratterizza la "perdita di rendimento".

Soltanto idealmente può pensarsi ad un esercizio assolutamente privo di resistenze passive: chiamasi "forza motrice ideale" quel particolare valore P_i di P che sarebbe capace di vincere il lavoro utile richiesto nel caso che le resistenze passive mancassero. Deve evidentemente essere, nell'ipotesi del regime assoluto,

$$P_i \delta = Q \delta_1 \quad (5)$$

e quindi

$$= \frac{Q \delta_1}{P \delta} = \frac{P_i \delta}{P \delta} = \frac{P_i}{P} \quad (6)$$

Nelle macchine a regime assoluto il rendimento può calcolarsi cioè come rapporto tra la forza motrice ideale P_i , come sopra definita, e la forza motrice effettiva.

Si osservi che la (6) non è affatto valida per macchine a regime periodico poichè per queste il teorema dei lavori virtuali applicato all'esercizio ideale, non è espresso da un'equazione che abbia la forma della (5), bensì da altra che contiene l'elemento dE , e non consente di conseguenza, la trasformazione sopra adoperata.

Tenendo conto del fatto che al termine del transitorio ($t = T$) risulta $\omega' = \omega$, abbiamo

$$L_{d_2} = \omega \int_{t_0}^T M_d dt + \int_{t_0}^T M_R (\omega - \omega') dt + \omega J \int_{t_0}^T \frac{d\omega'}{dt} dt - J \int_{t_0}^T \omega' \frac{d\omega'}{dt} dt =$$

$$= \omega \int_{t_0}^T M_d dt + \int_{t_0}^T M_R (\omega - \omega') dt + \omega J \int_0^{\omega} d\omega' - J \int_0^{\omega} \omega' d\omega' =$$

$$= \omega \int_{t_0}^T M_d dt + \int_{t_0}^T M_R (\omega - \omega') dt + J\omega^2 - \frac{1}{2} J\omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2} J\omega^2 + \int_{t_0}^T M_R (\omega - \omega') dt + \omega \int_{t_0}^T M_d dt$$

La soluzione di tale somma d'integrali richiede la conoscenza delle funzioni $\omega'(t)$ ed $M_d(t)$ e pertanto, occorre introdurre ulteriori ipotesi, quali ad esempio la legge temporale dell'innesto. Tuttavia, usualmente per evitare laboriose ricerche analitiche si impiegano (ma ciò non è in generale giustificabile) delle formule semiempiriche del tipo

$$L_d = \frac{1}{2} J\omega^2 \left[1 + \frac{M_a T}{J\omega} \right]$$

nelle quali si aumenta il termine relativo alle forze vi

vive semplicemente nel rapporto tra le coppie resistenti e quelle inerziali, ritenendo il transitorio ad accelerazione costante ($\dot{\omega}' = \omega/T$).

In tal maniera ovviamente il problema non è risolto esattamente, ma tali formule in effetti trovano un buon riscontro nell'esperienza.

Ciò premesso, è possibile reperire, come si è visto, per ciascun materiale, ad una data temperatura, un coefficiente d'usura specifica $V_o = [cm^3/(Vh)]$ di tal che il numero di cicli (innesti) N prevedibili avanti distruzione del ferodo sono dati da

$$N = \frac{V_u}{L_d V_o}$$

essendo V_u il volume utile del ferodo, variabile in dipendenza delle caratteristiche costruttive; se poi si compiono z cicli di innesto nell'unità temporale,

$$h = \frac{N}{z} = \frac{V_u}{z L_d V_o}$$

sarà la durata in ore dell'innesto.

Tuttavia abbiamo detto che tanto il coefficiente d'attrito che l'usura dipendono dalla temperatura; inoltre occorre non incrementare la temperatura anche per non indurre crisi in organi complementari dell'innesto, in particolare se esistono elementi in ghisa. In effetti tale esigenza è sentita soprattutto nei freni, ma un'indicazione può fornirsi anche per gli innesti.

In effetti occorre stabilire un bilancio termico onde stabilire la temperatura cui tende l'innesto. A tale sco-

po si può assumere un diagramma discontinuo rettangolo per il calore sviluppato nella fase di innesto, diagramma che può quindi essere espresso mediante, ad esempio, le serie di Fourier.

Esprimendo il bilancio tra tale calore prodotto, quello trasmesso all'esterno e quello immagazzinato, si costruisce un'equazione differenziale, di tipo più o meno complesso, che consente di rintracciare la temperatura cui tende l'innesto. Se questa non è accettabile, occorre introdurre nel progetto un sistema di lubrificazione. Tuttavia, non occorre dimenticare che la presenza del lubrificante riduce di molto il coefficiente d'attrito, richiedendo pertanto un aumento della superficie impegnata, a parità di pressione esercitata tra i dischi o coni d'innesto.

5) Innesti cilindrici

Con tale denominazione indicheremo nel prosieguo quegli innesti per i quali le superfici di collegamento risultino cilindriche; in tale classe l'accostamento viene ottenuto attraverso un moto di traslazione radiale, ovvero di rotazione di una delle parti.

Inoltre, la superficie di collegamento mobile può costituire un intero tronco di cilindro, ovvero un solo settore; il primo caso è diffuso in alcuni tipi di frizioni pneumatiche in cui l'elemento ad elevato coefficiente di attrito è montato su di un altro elemento in gomma, il quale per immissione di aria, dall'interno, viene a dilatarsi, ottenendosi il predetto moto radiale. Ammettendosi un'assialsimmetria nella distribuzione della pressione, ed essendo ancora nulla la variazione di raggio dell'elemento, ne risulta una pressione uniformemente distribuita su tutto l'elemento e pertanto la massima coppia trasmissibile sarà fornita da

$$M = 2f\pi pr^2b$$

essendo:

f = coefficiente di attrito

p = pressione

r = raggio di accoppiamento

b = impegno assiale delle superfici di collegamento

Ben più complesso risulta lo studio dell'innesto nel caso in cui la superficie mobile si limiti ad un solo arco di cilindro ed ancora ruotante attorno ad un punto fisso; tale schema richiede anzitutto l'analisi del sistema di usura e di carichi, al fine di determinare la presumibile distribuzione delle pressioni risultanti.

Riferiamoci pertanto allo schema di cui alla fig. 6 a), nel quale è indicata la coppia rotoidale costituita da un elemento cilindrico di raggio r, e centro O, che indicheremo con A e che supporremo costruito in materiale inusurabile. Sia poi B l'altro elemento di accoppiamento, in materiale usurabile, la cui superficie di collegamento sarà naturalmente anche cilindrica di raggio r e centro in O; B sia inoltre collegato rigidamente al proprio fulcro, posto in C, attorno al quale può ruotare; sia infine $R = \overline{OC}$.

Verificandosi per B, in presenza di rotazioni relative, una certa usura, sarà necessario che esso compia una rotazione attorno al proprio fulcro C perchè sia ripristinato il contatto; inoltre, perchè lo stesso continui a interessare tutta la superficie di B, occorrerà che anche la superficie usurata sia cilindrica di raggio r e centro in A.

Quando tale nuova superficie risulta a contatto di A,

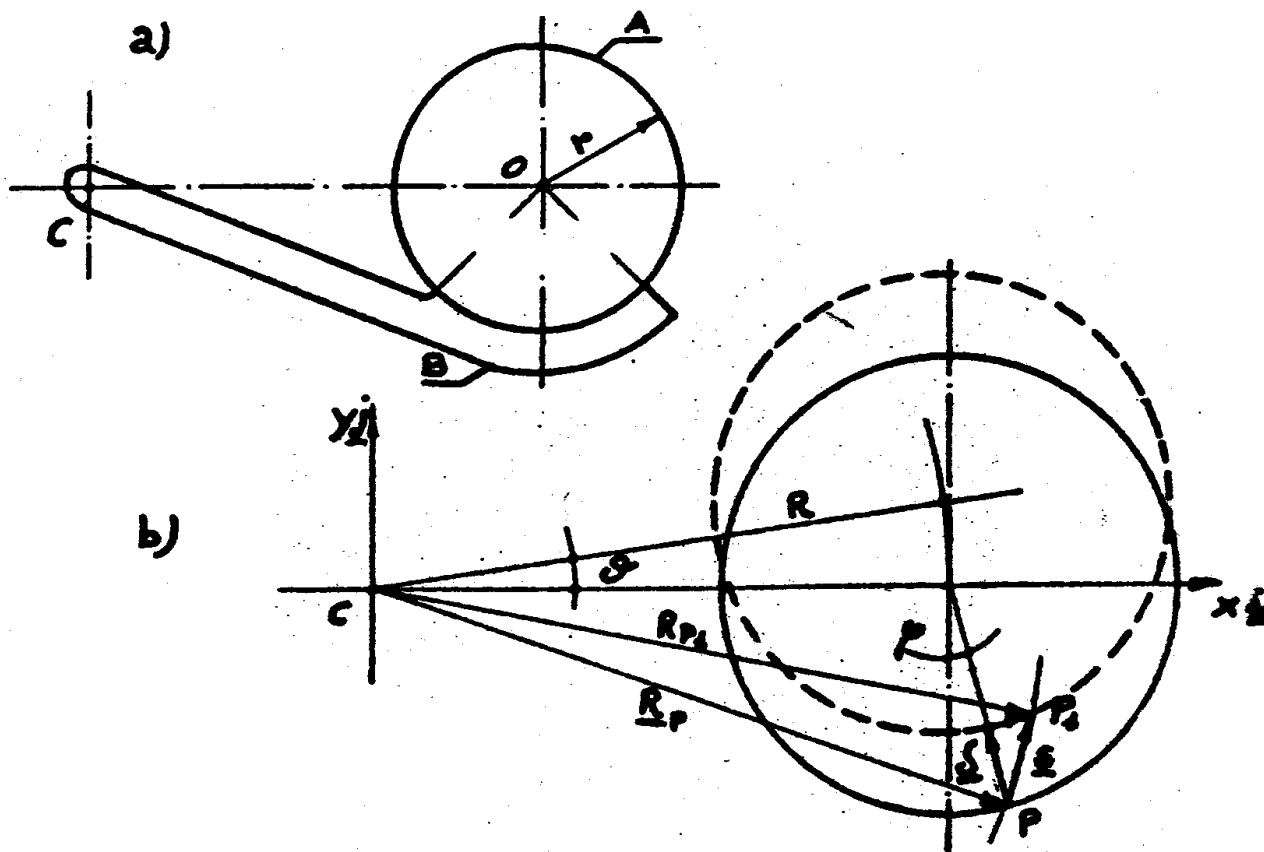


figura 6

la superficie iniziale (ormai usurata) ha idealmente compiuto uno spostamento angolare di ampiezza θ intorno al centro C, penetrando idealmente in A e spostandosi nella posizione indicata a tratto discontinuo nella figura 6 b).

Per determinare la legge d'usura di B, con riferimento ad un punto generico P della superficie iniziale, sarà sufficiente considerare lo spostamento che esso punto subisce per una rotazione di ampiezza θ di B intorno a C. In generale, tale spostamento ammetterà una componente in direzione radiale, che indicheremo con δ e che sarà l'usura verificatasi ed altra componente, normale alla precedente e pertanto tangente alla superficie iniziale e quindi corrispondente ad una rotazione rigida

intorno ad O.

Si riferisca tutto il sistema ad una coppia d'assi Cxy con origine nel fulcro e diversi \underline{i} e \underline{j} ; detta φ l'anomalia iniziale di P, misurata rispetto alla normale per O ad x il raggio vettore \underline{R}_p di P riesce dato da

$$\underline{R}_p = (R + r \sin \varphi) \underline{i} - r \cos \varphi \underline{j}$$

Se P_1 è il trasformato di P attraverso la rotazione di B attorno a C, il corrispondente raggio vettore sarà

$$\underline{R}_{p_1} = [R \cos \theta + r \sin(\varphi + \theta)] \underline{i} + [R \sin \theta - r \cos(\varphi + \theta)] \underline{j}$$

mentre lo spostamento del punto stesso risulta fornito da

$$\underline{s} = (P_1 - P) = \underline{R}_{p_1} - \underline{R}_p =$$

$$= \{r[\sin(\varphi + \theta) - \sin \varphi] - R(1 - \cos \theta)\} \underline{i} + \{R \sin \theta + r[\cos \varphi - \cos(\varphi + \theta)]\} \underline{j}$$

Indicando con \underline{r} il versore radiale, che vale, nel riferimento assunto,

$$\underline{r} = \sin \varphi \underline{i} - \cos \varphi \underline{j}$$

l'usura δ nel punto P sarà fornita, come componente di \underline{s} lungo $(-\underline{r})$,

$$\delta = \underline{s} \times (-\underline{r}) = R[\sin \varphi - \sin(\varphi - \theta)] + r(1 - \cos \theta)$$

ovvero, in forma vettoriale,

$$\underline{\delta} = -|\delta|\underline{r} = \{R[\sin \varphi - \sin(\varphi - \theta)] + r(1 - \cos \theta)\}(-\sin \varphi \underline{i} + \cos \varphi \underline{j})$$

Linealizzando il problema rispetto a θ , per i limitati valori che detta rotazione può assumere, ossia facendo

$$\sin \theta \approx \theta \quad \text{e} \quad \cos \theta \approx 1$$

detta usura viene fornita da

$$\underline{\delta} = R\theta \cos \varphi (-\sin \varphi \underline{i} + \cos \varphi \underline{j}) = \delta_0 \cos \varphi (-\sin \varphi \underline{i} + \cos \varphi \underline{j}) .$$

Il massimo valore dell'usura vale pertanto $\delta_0 = R\delta$ e si verifica per i punti disposti lungo la normale alla retta di appoggio del seguente \overline{OC} , risultando ancora proporzionale a detta distanza.

Quanto sopra dimostrato poteva essere anche ottenuto considerando che il moto di B risulta piano per ipotesi; pertanto esso poteva essere ridotto ad una rotazione rigida attorno ad O ed ad una traslazione di entità δ_0 parallelamente alla direzione di accostamento, definita dalla normale O al segmento \overline{OC} .

Per quanto concerne quindi la distribuzione della pressione lungo B, nell'ambito dell'ipotesi del Reye, e risultando $r = \text{cost.}$, si ha

$$f p r b d s \omega dt = K_1 ds dt$$

essendo ω la velocità angolare di A e ds l'elemento di arco, mentre K_1 è una costante di proporzionalità. Introducendo l'andamento ritrovato per $\delta(\varphi)$, si ricava quindi

$$p = p(\varphi) = \frac{K_1}{f r b \omega} \delta = K_2 \delta_0 \cos \varphi = p_0 \cos \varphi$$

ossia anche la distribuzione della pressione è esprimibile attraverso una funzione sinusoidale ed annette il proprio valor massimo lungo la direzione di accostamento.

Avendo così definita la distribuzione della pressione lungo l'arco di accoppiamento, consideriamo il sistema di cui alla figura 7, nella quale è raffigurato un tamburo di centro O e raggio r, contro al quale viene ad essere collegato, attraverso l'applicazione di idonei carichi esterni di chiusura, l'elemento, delimitato dalla stessa superficie cilindrica, di ampiezza angolare 2ϑ e rigidamente infulcrato in C.

Riferendo il sistema all'asse Ox, bisettore dell'angolo 2ϑ , la direzione di accostamento $O\bar{x}$ formerà un angolo α con tale asse di riferimento, angolo evidentemente pari a quello che la congiungente \overline{OC} forma con la normale per O a tale asse bisettore. In tale nuovo riferimento, l'andamento della pressione sarà espresso dalla funzione

$$p(\varphi) = p_0 \cos(\varphi - \alpha)$$

La massima reazione esplicabile pertanto dalle super

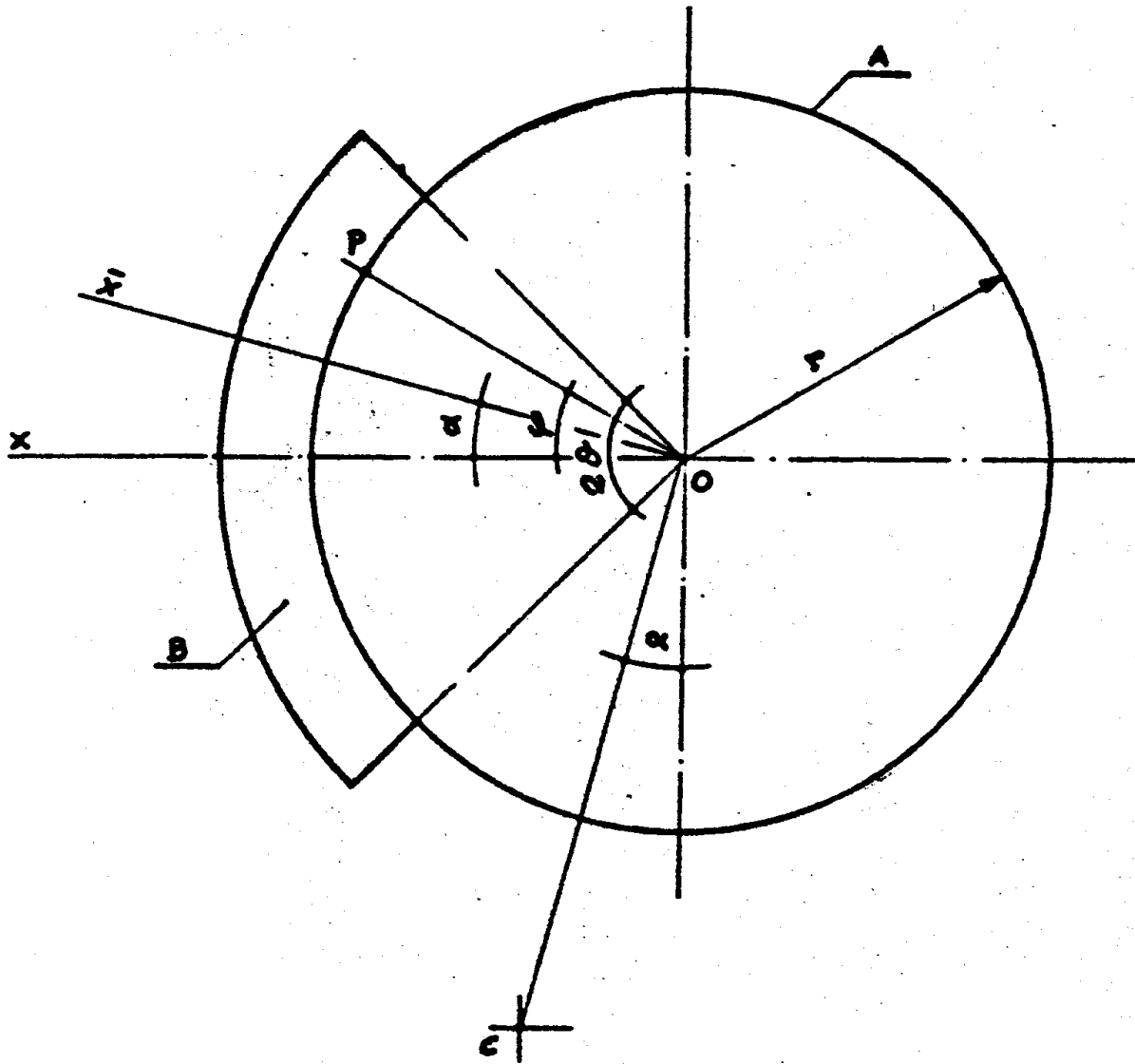


figura 7

fici a contatto ammetterà, pertanto, per ogni elemento infinitesimo di superficie $dA = brd\varphi$, una componente normale

$$dF_n = p dA = p_0 b r \cos(\varphi - \alpha) d\varphi$$

ed una tangenziale

$$dF_T = fp dA = fp_0 br \cos(\varphi - \alpha) d\varphi$$

Soffermandoci anzitutto sulle azioni normali, osserviamo che esse hanno tutte direzioni radiali e che, pertanto, tale sarà anche la direzione della loro risultante, direzione che possiamo quindi definire attraverso la propria anomalia γ . Per definire tale anomalia, basta osservare che il generico sforzo radiale può essere decomposto in due aliquote

$$dF'_n = dF_n \cos(\varphi - \gamma)$$

$$dF''_n = dF_n \sin(\varphi - \gamma)$$

rispettivamente parallela e normale alla risultante; evidentemente, la risultante delle dF''_n deve annullarsi, il che consente di individuare γ , riuscendo

$$\int_{-\theta}^{\theta} p_0 br \cos(\varphi - \alpha) \sin(\varphi - \gamma) d\varphi = 0$$

ossia

$$\int_{-\theta}^{\theta} \cos(\varphi - \alpha) \sin(\varphi - \gamma) d\varphi = 0$$

La soluzione di tale integrale fornisce la ricercata direzione γ , che risulta definita da

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \frac{2\theta - \sin 2\theta}{2\theta + \sin 2\theta} \quad (1)$$

essa risulta cioè esclusivamente dalla geometria dell'accoppiamento, tramite l'apertura 2θ dell'elemento mobile, e dalla direzione dell'accostamento. Ritenendo noto quindi γ , può ricavarsi la rienceata risultante, che è fornita da

$$\begin{aligned} F_n &= \int_A dF'_n = \int_{-\theta}^{\theta} p_0 br \cos(\varphi - \alpha) \cos(\varphi - \gamma) d\varphi = \\ &= \frac{p_0 br}{2} [2\theta \cos(\alpha - \gamma) + \sin 2\theta \cos(\alpha + \gamma)] \quad (2) \end{aligned}$$

Gli sforzi tangenziali dF_t ammetteranno una risultante

$$F_t = fF_n = f \frac{p_0 br}{2} [2\theta \cos(\alpha - \gamma) + \sin 2\theta \cos(\alpha + \gamma)]$$

fornita dall'ipotesi coulombiana sull'attrito, diretta normalmente alla F_n e tale da fornire una coppia complessiva rispetto ad O data da

$$M_f = \int_A r dE_t = \int_{-\theta}^{\theta} f p_0 r^2 \cos(\varphi - \alpha) d\varphi = 2f p_0 r^2 \sin \theta \cos \alpha$$

La retta d'azione della F_t riesce quindi normale alla direzione di anomalia γ , che intercetta in un punto E de

finito dall'equilibrio alla rotazione attorno ad O, nella forma

$$\overline{OE} : F_t = M_f$$

ossia

$$\overline{OE} = \frac{4r \sin \theta \cos \gamma}{2\theta + \sin 2\theta} \quad (3)$$

Tale braccio riesce quindi dipendente dalla geometria dell'accoppiamento (attraverso r , θ e γ) e dalla direzione di accostamento (attraverso γ). Per una data geometria, il punto E, che definisce contemporaneamente la coppia risultante e la direzione γ , si sposta, al variare di α , lungo una curva, definita dalla (3) e che può mostrarsi essere una circonferenza.

Infatti, in un riferimento Oxy quale quello indicato in figura 8, le equazioni parametriche di tale curva si scrivono

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2r \sin \theta}{2\theta + \sin 2\theta} (1 + \cos \varphi) \\ y = \frac{2r \sin \theta}{2\theta + \sin 2\theta} \sin \varphi \end{array} \right.$$

essendo φ l'angolo fornito dalla

$$\varphi = 2\gamma = 2 \operatorname{arctg} \left[\operatorname{tg} \alpha \frac{2\theta - \sin 2\theta}{2\theta + \sin 2\theta} \right]$$

Tale è l'equazione di una circonferenza avente centro

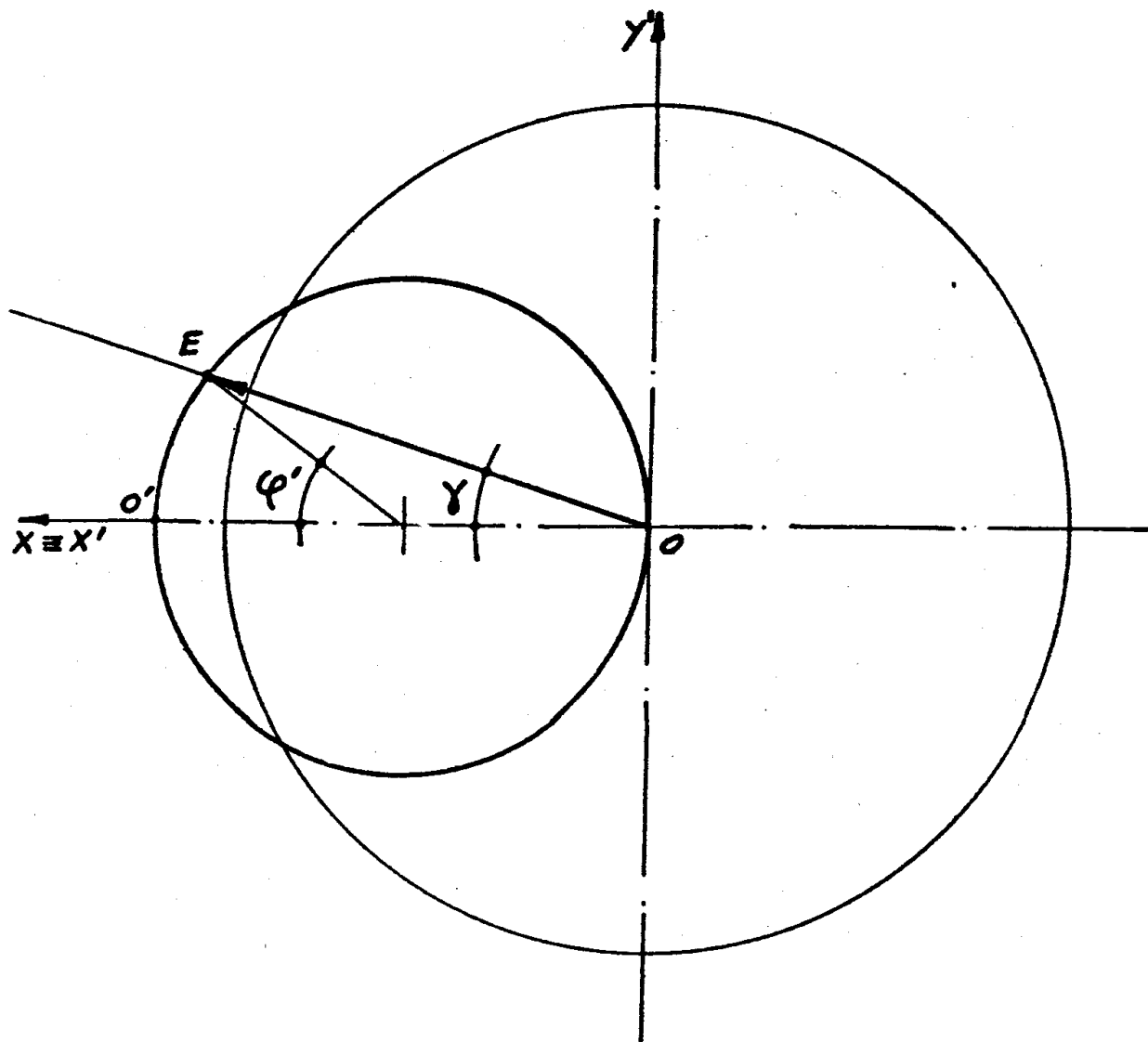


figura 8

sull'asse Ox bisettore dell'angolo 2θ a distanza

$$x_0 = \frac{2r \sin \theta}{2\theta + \sin \theta}$$

dal centro O e passante per la stessa origine. Pertanto, si individua su Ox anche il punto O', estremo del diametro OO', dato da

$$OO' = \frac{4r \sin \theta}{2\theta + \sin \theta}$$

e dal quale ci serviremo più oltre.

Per il ritrovato punto E, dunque, passano le rette di azione tanto di F_n che di F_t e, dunque, anche quella del loro risultante F , la cui direzione può ottenersi semplicemente tracciando per E stesso la retta inclinata di

$$\mu = \text{arctg} f$$

rispetto alla direzione \overline{EO} . E' ovvio che il verso di μ dipenderà dal senso di rotazione (o di incipiente rotazione) di A e dal fatto che l'elemento mobile sia esterno o interno ad A stesso.

Anzitutto si noti che la direzione di F_t , oltre che a passare per E, incontra anche O', riuscendo normale alla \overline{EO} ; infatti, per le ipotesi già introdotte sull'attrito coulombiano, il triangolo O'EO riesce rettangolo in E e pertanto inscrivibile in una semicirconferenza.

Inoltre, la direzione di F , già passante per E, incontra la circonferenza ora definita in un punto R, il quale gode della singolare proprietà di essere indipendente dalla direzione di accostamento.

Infatti, al variare di α (ma, ovviamente, permanendo inalterati tanto θ che μ) il punto E si sposta lungo la circonferenza ora definita e, di conseguenza, la direzione di F la incontrerà in un punto R' che coincide con R.

Infatti, per una nota proprietà della circonferenza, angoli eguali sottendono archi uguali; poichè pur variando E, l'angolo μ viene misurato sempre a partire da O, e dovendo dunque essere $OR = OR'$, discende la coincidenza $R \equiv R'$.

Dunque, quale che sia la direzione di accostamento, la risultante degli sforzi al contorno trasmessi tra le superfici collegate passa per il punto R, il quale assume pertanto il ruolo di vincolo equivalente dell'accoppiamento.

Evidentemente, se α è noto, con le relazioni innanzi introdotte R e la direzione di F saranno subito note; in altri termini, riuscendo tali elementi noti, R è del tutto equivalente ad un appoggio; è questo il caso degli innesti motore centrifughi a ceppi e dei freni a ceppi rigidi (figura 9).

Ma nella pratica degli innesti freno sono sovente utilizzati ceppi oscillanti intorno al proprio collegamento col fulcro C. In tali casi, il centro di istantanea rotazione del ceppo non risulta a priori nota, e tantomeno è possibile ricavare α .

Tuttavia, la sola posizione di R può essere rintracciata ricordando che essa risulta indipendente da α e pertanto può essere valutata per un α arbitrariamente assunto; basterà quindi portare per O' ($\alpha = 0$) una retta inclinata di μ rispetto al diametro OO' per ritrovare R come intersezione della circonferenza e di tale direzione.

In tal caso, in cui è nota la posizione del vincolo (che ora agisce come una cerniera) ma non la direzione della sua posizione, questa sarà ricavabile in base a condizioni di equilibrio globale del ceppo.

Ad esempio (figura 10) se il ceppo risulta collegato al fulcro C tramite una leva, attorno alla quale esso può ruotare in grazia di un'altra cerniera H, la reazione di R (è questo il caso più semplice) per assicurare l'equilibrio del ceppo dovrà passare per H.

Ricavata la direzione di tale reazione, potrà sempre ricavarsi, dall'equilibrio dell'intero sistema di innesto, il suo modulo, come esemplificato per via grafica nella stessa figura 10. Ciò consentirà di determinare le for

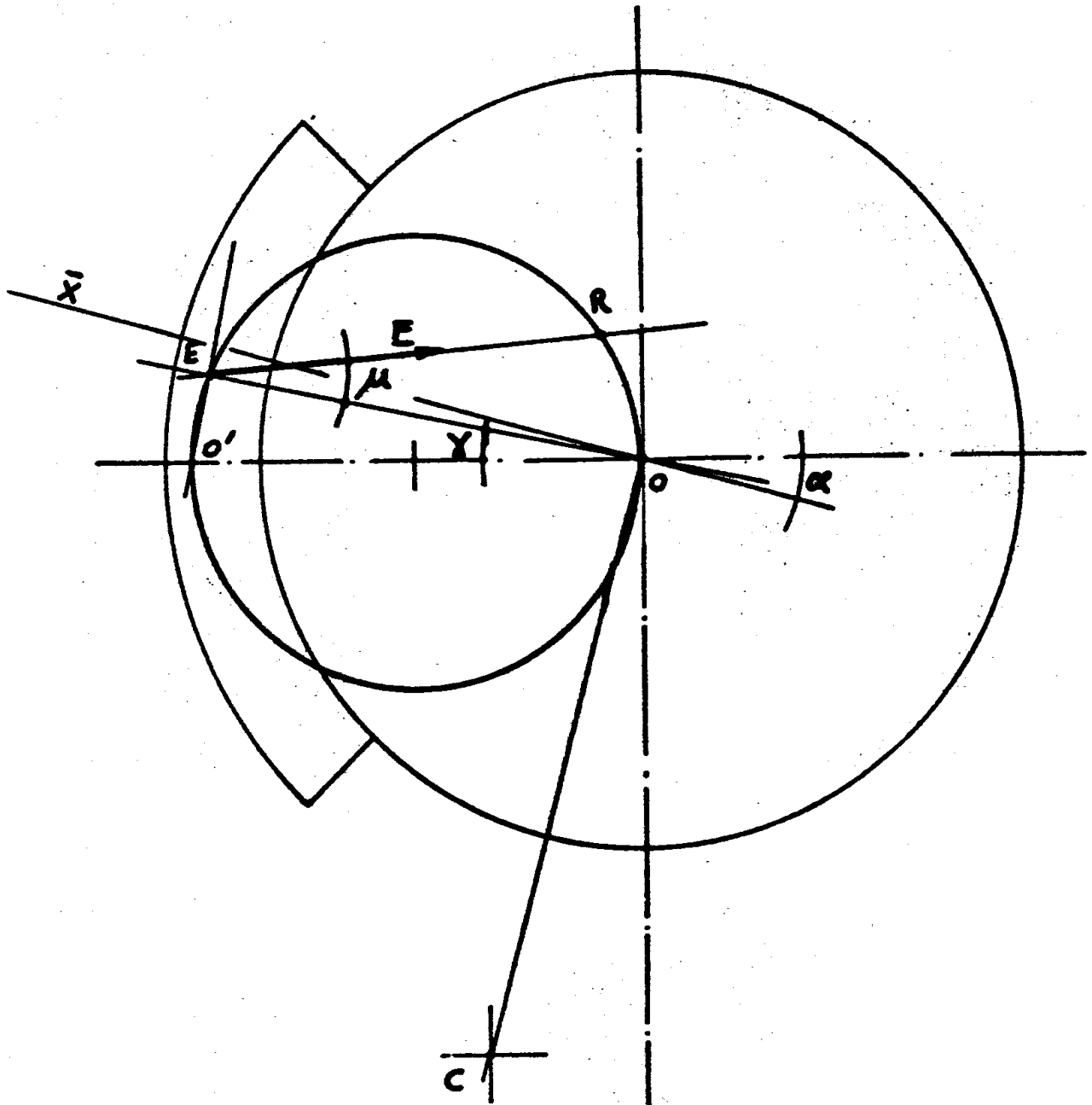


figura 9

za di chiusura necessaria per l'innesto, ovvero di valutare il valore massimo della pressione corrispondente a un dato carico di chiusura, od ancora la reazione nelle cerniere H e C, ed infine, le sollecitazioni nel ceppo stesso.

Nelle usuali applicazioni, è raro riscontrare l'impie

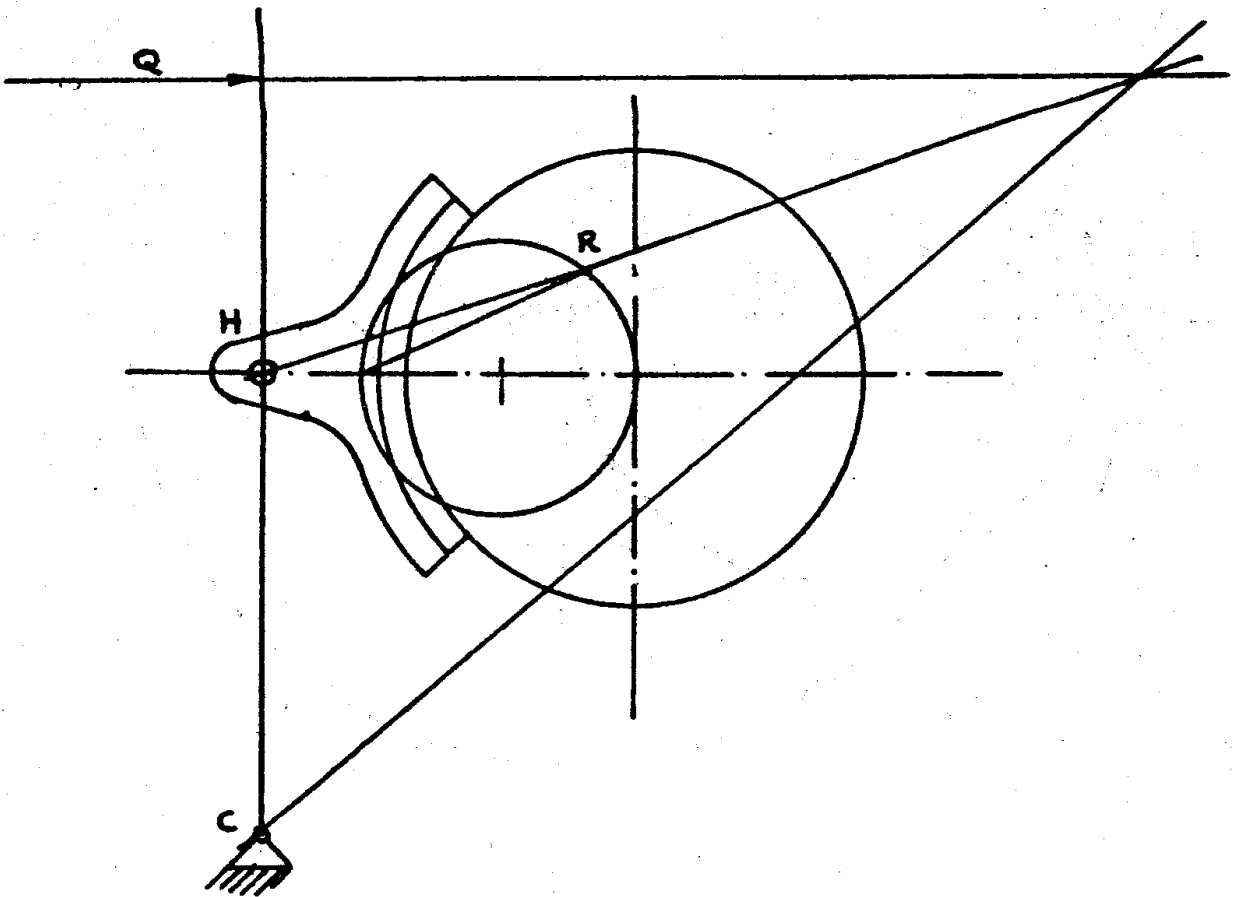


figura 10

go di un sol ceppo; più generalmente, infatti, i sistemi introdotti nella pratica utilizzano due ceppi o, più raramente un numero maggiore. Mentre l'equilibrio di ogni singolo elemento di innesto può essere studiato indipendentemente dagli altri eventualmente presenti, occorre mettere in evidenza che due elementi possono contribuire all'innesto in misura diversa.

Con riferimento al più comune caso dei due ceppi ed alla figura 11 a), è facile mostrare che se i due sistemi di ceppo risultano simmetrici rispetto ad un piano diametrale (AA in figura) sia per geometria che per carico, con le rotazioni di cui in figura si ha:

$$F_{n_1} = - \frac{Qa}{c+fb}$$

$$F_{n_2} = - \frac{Qa}{c-fb}$$

ossia $F_{n_2} > F_{n_1}$. Al contrario, nel caso che tra i due sistemi esista una corrispondenza di emisimmetria, con le notazioni di fig. 11 b) si ha

$$F_{n_1} = - \frac{Qa}{c+fb} = F_{n_2}$$

Per evitare differenze di efficacia tra i sistemi, si usa sovente porre $b = 0$, col che le due azioni di innesto riescono eguali in ogni caso.

