

MOLLE METALLICHE

Prima di iniziare la trattazione sulle molle, e' utile richiamare alcuni concetti fondamentali ed alcune definizioni sul fenomeno della deformazione di un sistema sotto l'azione di carichi esterni.

Ogni corpo reale sotto l'azione di forze si deforma e la deformazione, come effetto del carico applicato, e' funzione di esso. Assunti P ed f come parametri misurabili che diano la possibilita' di esprimere l'entita' del carico e della deformazione, si puo' graficamente rappresentare questa dipendenza sul piano P, f con un diagramma.

Si precisa che P puo' intendersi, in particolare, rappresentativo di una forza o di una coppia, cosí come f puo' rappresentare uno spostamento o una rotazione.

Per lo studio della deformabilita' di un sistema conviene assumere come parametro f quella componente di spostamento (o rotazione) per la quale la forza (o la coppia) P compie lavoro.

Qualunque sia il sistema di cui si considera la deformazione, riportando in coordinate cartesiane i valori del carico P ed i corrispondenti valori della freccia f , si avra' una certa curva che sara' la *curva di deformabilita'* di quel sistema, relativa al tipo di carico P che si sta considerando. (fig.1).

Affinche' questa curva assuma effettivamente il significato di curva di deformabilita' propria del sistema, rappresenti cioe' l'interdipendenza tra carico e deformazione dovuta alle sue caratteristiche intrinseche (fondamentalmente configurazioni geometrica e natura del materiale), si devono presupporre e verificare le due seguenti condizioni:

a) la deformazione non deve essere ostacolata da cause dissipative;

b) il carico P deve venire applicato in modo statico, cioe' deve essere fatto crescere con lentezza tale da escludere ogni

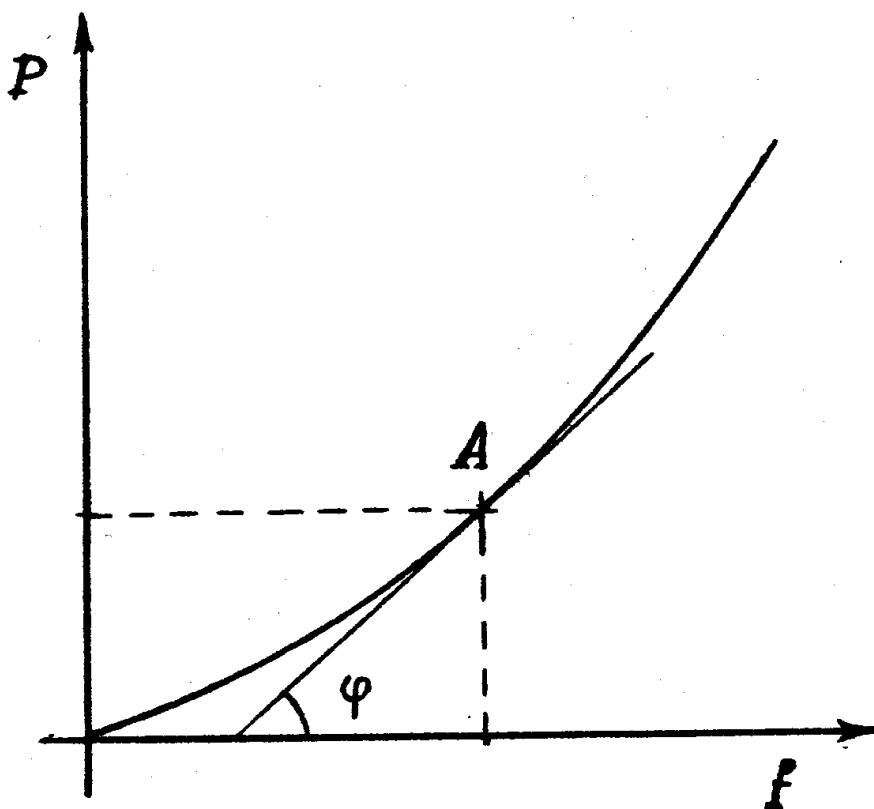


fig. 1

fenomeno di carattere dinamico, per cui in ogni istante si possa ammettere che il valore del carico P sia in equilibrio col valore della reazione che insorge nel solido per effetto della deformazione. In effetti ogni trasformazione avviene solo in quanto si fa prevalere in ogni istante l'entità della causa sull'entità dell'effetto: in caso di equilibrio la trasformazione non avrebbe luogo. Si può tuttavia idealizzare la trasformazione infinitamente lenta, cioè tale che in ogni istante il carico prevalga tanto poco sulla reazione che insorge con la deformazione che non venga turbata la condizione di equilibrio.

Se le ipotesi suddette non fossero verificate, il valore di f corrispondente ad un certo valore del carico, non dipenderebbe esclusivamente dalla deformabilità del solido, ma anche da

altri fattori che si vogliono escludere dalla nostra considerazione.

Rigidezza

Si definisce rigidezza del sistema deformabile nei confronti della causa deformante P ed in corrispondenza di un certo valore della freccia, il rapporto fra l'incremento infinitesimo del carico ed il corrispondente incremento del parametro di deformazione:

$$c = \frac{dP}{df} \quad (1)$$

graficamente e' rappresentata dalla pendenza, nel generico punto, della curva di deformabilita' del corpo rispetto all'asse f .

Con riferimento alla fig.1 si ha dunque, in A , $c = \operatorname{tg} \varphi$.

Deformabilita'

Si definisce deformabilita' l'inverso della rigidezza:

$$a = \frac{df}{dP}$$

La rigidezza di un corpo dipende dalle proprieta' del materiale di cui esso e' fatto e dalla sua configurazione geometrica. Poiche' in genere le une e l'altra variano al variare del carico e, corrispondentemente, della freccia, segue che in generale in un corpo la rigidezza e' variabile con il carico e la curva di deformabilita' non e' una retta.

Deformazione elastica

La deformazione si dice elastica quando allo scomparire dell'incremento della causa deformante, scompare l'incremento di deformazione.

Nell'ambito dei materiali che noi trattiamo (materiali metallici), se un corpo si presenta deformabile elasticamente in corrispondenza di un certo valore di P , esso presenta comportamento elastico anche per tutti i valori del carico più bassi di P e quindi almeno fino a questo valore la curva di carico coincide con la curva di scarico.

L'elasticità può essere tale che il sistema presenta costante la sua rigidità; in questo caso la curva di deformabilità, oltre a venire riprodotta al crescere ed al diminuire del carico, ha la tangente costante, essa cioè è una retta: per meglio dire il sistema si presenta a deformabilità lineare (sistema elastico linearmente). Affinché un sistema sia deformabile in modo lineare, tale deve essere il materiale che lo costituisce, cioè deve soddisfare alla legge di Hooke; inoltre la configurazione geometrica del sistema deve variare, per effetto del carico, abbastanza poco o comunque in modo che non si alteri l'influenza del carico stesso sulla deformazione dei singoli elementi di volume costituenti il sistema.

Mentre in pratica la condizione dell'elasticità del materiale è facilmente realizzabile, non altrettanto facilmente è ottenibile quella dell'inalterabilità dell'influenza di cui si è detto specie nel caso delle molle, che sono organi elastici configurati proprio in modo da avere delle frecce relativamente alte. In effetti quindi nessuna molla ha la caratteristica di deformazione rigorosamente lineare. Tuttavia, adottando configurazioni opportune, è possibile realizzare molle a caratteristica rettilinea, ovvero assimilabile con buona approssimazione ad una retta, almeno entro intervalli abbastanza estesi di variabilità della freccia.

Lavoro di deformazione

Si chiama lavoro di deformazione il lavoro compiuto dalla forza P per condurre il sistema ad assumere la freccia f . Esso è espresso dalla relazione:

$$L = \int_0^f P \, df$$

ovvero, per la (1), da

$$L = \int_0^P \frac{P}{\epsilon} \, dP$$

Nell'ipotesi di applicazione statica dei carichi e di assenza di cause dissipative, cioè se non intervengono fenomeni dinamici e non vi sono perdite di energia per fenomeni dissipativi, e se il sistema è deformabile elasticamente, il lavoro compiuto dalla forza P è uguale all'energia elastica immagazzinata dal corpo e può essere restituito. Il lavoro di deformazione è rappresentato nel piano fP dall'area sottostante alla curva di deformazione. Essendo le molle organi elastici di elevata deformabilità, esse sono adatte ad assorbire grandi quantità di energia elastica anche sotto carichi relativamente piccoli.

Per un sistema elastico linearmente ($c = \frac{P}{f} = \text{cost.}$) la (2) si scrive

$$L = \frac{1}{c} \int_0^P P dP = \frac{P^2}{2c} = \frac{cf^2}{2} = \frac{1}{2} Pf \quad (3)$$

cioè il lavoro è uguale alla metà del prodotto del valore finale del carico per il corrispondente valore della freccia (teorema di Clapeyron).

Coefficiente di utilizzazione

Si definisce coefficiente di utilizzazione di una molla il rapporto fra l'energia potenziale elastica da essa accumulata sotto l'azione di un certo carico P e l'energia che si avrebbe se il potenziale elastico assumesse in tutti i punti della molla il valore uguale a quello massimo indotto dalla stessa forza P .

Il potenziale elastico in un punto di un solido elastico soggetto ad un sistema di carichi è l'energia elastica di deformazione, riferita all'unità di volume, corrispondente allo stato tensionale nel punto considerato.

Se σ_1 , σ_2 e σ_3 sono le tensioni principali, il potenziale elastico è dato (nell'ipotesi di isotropia del materiale e di validità della legge Hooke) dalla relazione:

$$\varphi = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] \quad (4)$$

con

ν modulo di Poisson,
 E modulo di elasticità lineare.

Moltiplicando φ per l'elemento di volume preso intorno al punto considerato si ha l'energia elementare di deformazione elastica relativa a tale intorno infinitesimo.

$$\varphi dv = d\phi$$

Integrando a tutto il volume si ha l'energia potenziale totale di deformazione del solido

$$\phi = \int_v \varphi dv$$

Il potenziale φ avra' una certa distribuzione nel solido, nel quale ci sara' un punto (o un insieme di punti) in cui esso assume un valore massimo φ_0 .

Il prodotto

$$\phi_0 = \varphi_0 v \quad (5)$$

rappresenta dunque l'energia potenziale elastica che si avrebbe nel solido se in tutti i suoi punti il potenziale assumesse il valore massimo φ_0 .

Ora il coefficiente di utilizzazione m non e' altro che il rapporto

$$m = \frac{\phi}{\phi_0}$$

Si nota subito che m non puo' assumere valori superiori all'unita'. Quanto piu' m si avvicina ad 1, tanto migliore risulta l'utilizzazione del materiale costituente la molla, considerando che il requisito fondamentale di un tal solido elastico e' l'attitudine ad accumulare la maggior quantita' possibile di energia di deformazione.

Il coefficiente di utilizzazione e' quindi un parametro molto importante per valutare l'efficienza delle molle.

Nelle ipotesi di assenza di cause dissipative il lavoro di deformazione L e' uguale all'energia potenziale elastica:

$$L = \frac{1}{2} P f = \phi$$

per cui si ha

$$m = \frac{Pf}{2\phi_0} \quad (6)$$

relazione che lega il carico e la freccia con il coefficiente di utilizzazione.

Casi particolari

Molla di flessione

Lo stato tensionale e' monoassiale:

$$\sigma_1 \neq 0, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0.$$

per cui la (4) si riduce a

$$\varphi = \frac{\sigma^2}{2E} \quad (7)$$

Il massimo valore della tensione si ha nella sezione in cui e' massimo il momento flettente ed e':

$$\sigma_0 = \frac{M_{f \max}}{W_f}$$

con W_f modulo di resistenza a flessione. Si ha allora, dalla (5) e dalla (7)

$$\phi_0 = \frac{\sigma_0^2}{2E} V = \frac{M_{f \max}^2 V}{2EW_f^2}$$

con V volume della trave.

Il coefficiente di utilizzazione e' dunque, per la (6)

$$m = \frac{1}{2} \cdot \frac{Pf}{\phi_0} = \frac{P f E W_f^2}{M_{f \max}^2 V}$$

Molla di torsione

Lo stato tensionale e' biassiale ed e' esprimibile con una sola tensione tangenziale τ . Si ha in questo caso

$$\phi = L = \frac{1}{2} M_t \theta$$

$$\varphi = \frac{\tau^2}{2G}$$

$$\tau_0 = \frac{M_{t \max}}{W_t}$$

con W_t modulo di resistenza a torsione. Ne deriva

$$\phi_0 = \frac{\tau_0^2}{2G} V$$

$$m = \frac{M_t \theta G W_t^2}{M_{t \max}^2 V}$$

Applicazione delle molle

Tra le principali applicazioni delle molle nella Meccanica ricordiamo le seguenti:

- a) come organi destinati ad esercitare una determinata forza su un elemento meccanico (es. negli innesti a frizione);
- b) come organi capaci di attenuare le accelerazioni (esempio, molle parastrappi delle frizioni);
- c) come serbatoi di energia (es. molle di carica degli orologi);
- d) nei sistemi meccanici di propulsione.

Vari tipi di molle

Nell'ambito delle molle assimilabili a travi ad asse retti lineo o a piccola curvatura si suole parlare di *molle di flessione* o di *molle di torsione* a seconda che la caratteristica di sollecitazione prevalente nell'organo configurato a molla sia appunto quella di flessione o quella di torsione.

Questa precisazione è utile ad evitare qualche equivoco in cui si può incorrere usando questa terminologia.

Se ad es. si considera una molla configurata ad elica cilindrica (molla elicoidale) sollecitata in modo che le due spire di estremità ruotino una rispetto all'altra intorno all'asse dell'elica, si può essere indotti a parlare di molla di torsione. Però, se si considera che alla deformazione avvenuta nel tondino costituente la molla corrisponde una caratteristica di flessione, sembra opportuno parlare di molla di flessione. Si sarebbe poi portati a chiamare molla di compressione o di trazione la molla elicoidale sollecitata con un carico agente nella direzione dell'asse dell'elica, mentre se si considera la sollecitazione nel tondino essa risulta una molla di torsione.

Converremo dunque nell'adottare la terminologia ora introdotta di far riferimento alla caratteristica di sollecitazione che è prevalente nella trave con cui è formata la molla.

Molla di flessione

Per studiare alcuni diffusi tipi di molle di flessione con viene richiamare le nozioni relative alle travi a mensola a sezione uniforme caricate o come un momento flettente (fig. 2a) ovvero con una forza concentrata normale all'asse (fig. 2b) all'estremità libera.

Si noti che nel primo caso (trave caricata con un momento) la freccia che si è prima definita non è l'abbassamento (come usualmente si intende) ma è la rotazione della sezione di estremità.

Se si adotta il riferimento (O, z, v) indicato in figura, le formule principali relative alla linea elastica per la trave a mensola caricata con un momento flettente M nella sezione estrema libera sono le seguenti:

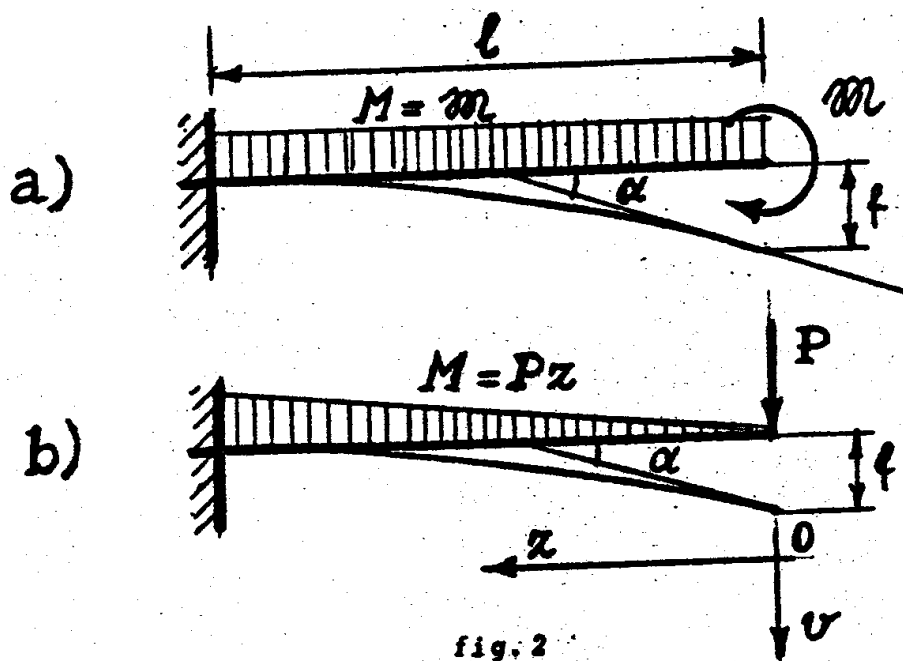


fig. 2

Equazione della linea elastica

$$v(z) = \frac{M}{2EI} (z^2 - 2lz + l^2)$$

Rotazione della generica sezione

$$\frac{dv}{dz} = - \frac{M}{EI} (l - z)$$

(compare il segno meno perche', mentre M e' implicitamente considerato positivo, la deformata e' tale che nel riferimento cartesiano adottato, ad un aumento dell'ascissa corrisponde una diminuzione dell'abbassamento). Per $z = 0$ si hanno dalle due formule rispettivamente l'abbassamento e la rotazione della sezione di estremita'

$$f = \frac{Ml^2}{2EI} \quad \alpha = - \frac{Ml}{EI}$$

Trattandosi di organi elastici linearmente, la rigidezza puo' essere espressa come rapporto fra valori finiti del parametro di carico e del parametro di deformazione

$$c = \frac{M}{\alpha} = \frac{EI}{l}$$

(si trascura il segno meno perche' non ha senso tener conto nella espressione del parametro rigidezza di una molla, delle convenzioni circa i segni che ci possono essere comode al fine di determinare gli spostamenti).

La tensione massima σ_0 e' :

$$\sigma_0 = \frac{N}{I} \cdot \delta_{max}$$

ove δ_{max} e' la massima distanza, nella sezione, dall'asse neutro.

Il coefficiente di utilizzazione e'

$$m = \frac{\frac{1}{2} N \alpha}{\phi_0} = \frac{\frac{1}{2} \frac{N^2 l}{EI}}{\phi_0}$$

e quindi, essendo

$$\phi_0 = \frac{\sigma_0^2}{2E} A l = \frac{N^2 \delta_{max}^2}{2EI^2} A l$$

dove A e' l'area della sezione della trave, risulta

$$m = \frac{\frac{1}{2} \frac{N^2 l}{EI}}{\frac{1}{2} \frac{N^2 \delta_{max}^2}{EI^2} A l} = \frac{l}{A \delta_{max}^2}$$

Le formule analoghe principali relative alla trave a menso la soggetta ad un carico normale all'asse concentrato nella se zione libera sono le seguenti

$$v(z) = \frac{P}{6EI} (z^3 - 3l^2z + 2l^3)$$

$$\frac{dv}{dz} = - \frac{P}{2EI} (l^2 - z^2)$$

$$f = \frac{Pl^3}{3EI}$$

$$\alpha = - \frac{Pl^2}{2EI}$$

$$c = \frac{3EI}{l^3}$$

$$\sigma_0 = \frac{Pl}{I} \delta_{max}$$

$$m = \frac{I}{3A \delta_{max}^2}$$

Si noti che a parità di A , di δ_{max} e di I nel primo caso si ha un coefficiente di utilizzazione maggiore. Questo accade perché la distribuzione della caratteristica flettente è un'iforme nella trave, mentre nel secondo caso essa varia lungo la trave ed è massima nella sezione d'incastro.

Molle di flessione a lamina

Come appare dall'espressione della rigidezza, una molla di flessione avente una configurazione del tipo ora esaminato sarà tanto più deformabile quanto minore è il momento d'inerzia della sua sezione rispetto all'asse neutro. Ne segue che una forma conveniente da dare alla sezione di questo tipo di molle è quella rettangolare allungata, avente la minor dimensione nel piano di flessione.

Le molle così configurate sono dette *molle a lamina*.

Problema della mensola ad uniforme resistenza per le molle a lamina.

Come si è visto, il valore del coefficiente di utilizzazione di una molla è in diretta relazione con la distribuzione delle tensioni nella molla stessa: esso è tanto maggiore quanto più la distribuzione delle tensioni è vicina alla condizione di uniformità.

In una molla costituita da una trave incastrata, soggetta a carico concentrato sull'estremità libera, la migliore utilizzazione del materiale si consegue configurandola a sezione

variabile lungo l'asse, in modo che la tensione massima assuma in tutte le sezioni lo stesso valore.

Mantenendo la forma rettangolare della sezione, con larghezza b ed altezza h , la tensione massima nella sezione generica e'

$$\sigma = \frac{6Pz}{bh^2}$$

Se si designano con il pedice o le grandezze relative alla sezione d'incastro ($z = l$), la condizione innanzi definita, che e' quella dell'uniforme resistenza, e' espressa dalla relazione

$$\sigma = \sigma_0$$

e quindi da

$$\frac{z}{bh^2} = \frac{l}{b_0 h_0^2} \quad (8)$$

Associando a questa un'altra condizione per le dimensioni b ed h della sezione, si individua una particolare legge di variazione della sezione stessa lungo l'asse.

Imponendo ad es. che non vari lungo l'asse il rapporto tra i lati della sezione, cioe' che si abbia, per ogni valore di z ,

$$\frac{b}{h} = \frac{b_0}{h_0} \quad (9)$$

e sostituendo nella (8) l'espressione di b ricavata dalla (9), si ottiene

$$\frac{h_0 z}{b_0 h^3} = \frac{l}{b_0 h_0^2}$$

da cui

$$h = h_0 \sqrt[3]{\frac{z}{l}}$$

e quindi anche, per la stessa (9)

$$b = b_0 \sqrt[3]{\frac{z}{l}}$$

Tenendo dunque costante il rapporto fra i lati della sezione, la condizione di uniforme resistenza si consegue configurando i profili della molla nel piano di flessione e nel piano assiale ad esso normale secondo parabole cubiche aventi il vertice nell'estremità libera e corde rispettivamente h_0 e b_0 in corrispondenza dell'incastro.

Se si tiene costante la larghezza della sezione, cioè si pone, per ogni z ,

$$b = b_0 ,$$

la (8) porge

$$h = h_0 \sqrt{\frac{z}{l}}$$

Quindi per una trave di larghezza costante, la condizione dell'uniforme resistenza, si ottiene facendo variare l'altezza secondo una parabola quadratica.

Se infine si assume costante l'altezza della sezione, ponendo per tutta la lunghezza

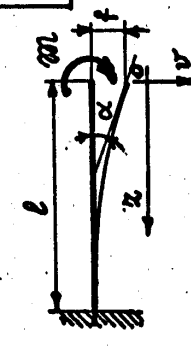
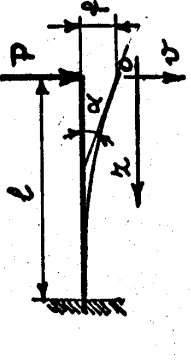
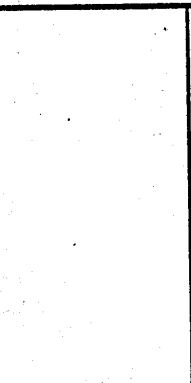


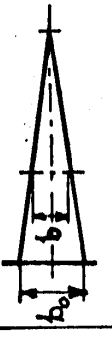
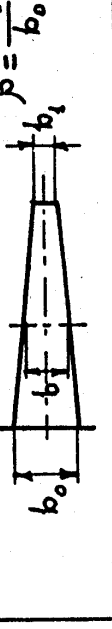
$$h = h_0 ,$$

dalla (8) segue

$$b = \frac{b_0}{l} z ,$$

cioè l'uniforme resistenza si ottiene facendo aumentare linearmente la larghezza della sezione dal valore zero all'estremità libera al valore b_0 all'incastro. La molla dunque avrà profilo rettangolare nel piano di flessione e pianta triangolare.

Dei tre criteri prospettati, l'ultimo è evidentemente il più semplice dal punto di vista realizzativo ed è perciò quello ordinariamente adottato in pratica.

				
	sezione 			
Abbassam. della sezione v(z)	$\frac{6m}{Eb^3} (z^3 - 2lz + l^2)$	$\frac{2P}{Eb^3} (z^3 - 3l^2z + 2l^3)$	$\frac{6Pl}{Eb^3} (z^2 - 2lz + l^2)$	$\frac{12Pl^3}{Eb_0^3} \frac{1}{(1-\beta)^2} \left\{ \frac{1-3\beta}{2} - (1-2\beta) \frac{z}{l} + \frac{1-\beta}{2} \frac{z^2}{l^2} - \frac{\beta}{1-\beta} \left[\beta + (1-\beta) \frac{z}{l} \right] \ln \left[\beta + (1-\beta) \frac{z}{l} \right] \right\}$
Rotazione della sezione dv/dz	$-\frac{12ml}{Eb^3} (l-z)$	$-\frac{6P}{Eb^3} (l^2 - z^2)$	$-\frac{12Pl}{Eb^3} (l-z)$	$-\frac{12Pl^2}{Eb_0^3} \frac{1}{1-\beta} \left\{ 1 - \frac{z}{l} + \frac{\beta}{1-\beta} \ln \left[\beta + (1-\beta) \frac{z}{l} \right] \right\}$
Freccia f	$\frac{6ml^2}{Eb^3}$	$\frac{4Pl^3}{Eb^3}$	$\frac{6Pl^3}{Eb_0^3}$	$4K \frac{Pl^3}{Eb_0^3}$ (1)
Rotaz. della sezione libera alpha	$-\frac{12ml}{Eb^3}$	$-\frac{6Pl^2}{Eb^3}$	$-\frac{12Pl^2}{Eb_0^3}$	$-\frac{12Pl^2}{Eb_0^3} \frac{1}{1-\beta} \left(1 + \frac{\beta}{1-\beta} \ln \beta \right)$
Rigidezza c	$\frac{Eb^3}{12l}$	$\frac{Eb^3}{4l^3}$	$\frac{Eb_0^3}{6l^3}$	$\frac{Eb_0^3}{4Kl^3}$ (1)
Tensione massima sigma_0	$\frac{6m \cdot l}{bh^2}$	$\frac{6Pl}{bh^2}$	$\frac{6Pl}{bh^2}$	$\frac{6Pl}{bh^2}$
Coefficiente di utilizzazione m	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9} \frac{K}{1+\beta}$ (1)

(1) $K = \frac{3}{(1-\beta)^2} \left(\frac{1-3\beta}{2} - \frac{\beta^2}{1-\beta} \ln \beta \right)$	β	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
	K	1,500	1,390	1,316	1,250	1,202	1,160	1,124	1,085	1,054	1,025	1,000

Le conclusioni sulla configurazione a sezione variabile delle molle di flessione a lamina sono in contrasto con l'ipotesi di uniformità della sezione, poste a base della validità delle formule impiegate, che sono quelle risolutive del problema del De Saint Venant. Tuttavia i risultati si possono ritenere validi, con buona approssimazione, purché la variazione di sezione non sia troppo rapida.

Nello studio delle molle di flessione, si sono inoltre considerati molto piccoli, rispetto alla lunghezza della trave, gli spostamenti delle singole sezioni dalla configurazione in deformata ed in conseguenza se ne è trascurata la componente parallela all'asse, come si fa nella teoria delle travi in flesse. Ne segue che, nell'ambito di questa approssimazione, i risultati ottenuti sono validi anche per travi che nella configurazione indeformata presentino una piccola curvatura, che comporti deviazioni dell'asse dall'andamento rettilineo dello stesso ordine di grandezza degli spostamenti considerati.

Molle a balestra

Le molle a lamina a pianta triangolare presentano due inconvenienti :

- a) grande ingombro in pianta (e' da rilevare che, a parità di carico, di spessore e lunghezza della lamina e di sollecitazione massima, la larghezza della sezione d'incastro e' la stessa che per la molla a pianta rettangolare) .
- b) impossibilità pratica di applicare un carico sulla sezione di estremità, nominalmente ridotta ad uno spigolo.

Al primo inconveniente si può porre rimedio dividendo le molle in strisce e sovrapponendo queste ultime l'una all'altra, come e' indicato in fig. 3.

In prima approssimazione si può ammettere che sotto un carico applicato sull'estremità della striscia più lunga, con verso tale da influenzare tutte le strisce, queste, dovendo ri-

manere a contatto fra loro, si deformino tutte secondo una linea elastica, che tale linea sia la stessa che si ha per la molla unica a pianta triangolare e che le varie strisce, disposte secondo le due configurazioni (affiancate oppure sovrapposte) lavorino allo stesso modo.

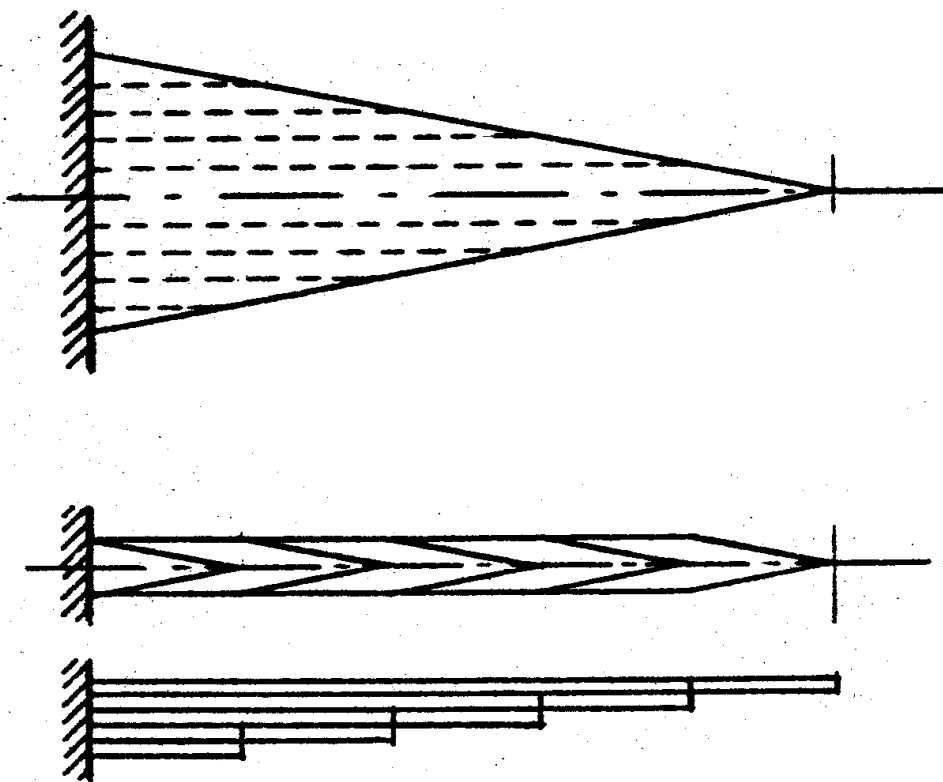


fig. 3

La molla così configurata è la ben nota "molla a balestra".

Le strisce vengono dette "foglie"; "foglia maestra" è la più lunga di esse, sulla cui estremità viene applicato il carico.

La configurazione della molla a balestra si giustifica anche con le considerazioni seguenti.

In una trave a sezione rettangolare di larghezza B ed altezza H la curvatura della linea elastica in corrispondenza di una sezione nella quale si abbia momento flettente V è data da:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{N}{EI} = \frac{12 \cdot N}{EbH^3} \quad (10)$$

Supponiamo ora di sezionare la trave con un piano parallelo all'asse e normale al piano di flessione, così da trasformarla in un sistema di due travi sovrapposte, di altezza h_1 ed h_2 (vedi fig. 4).

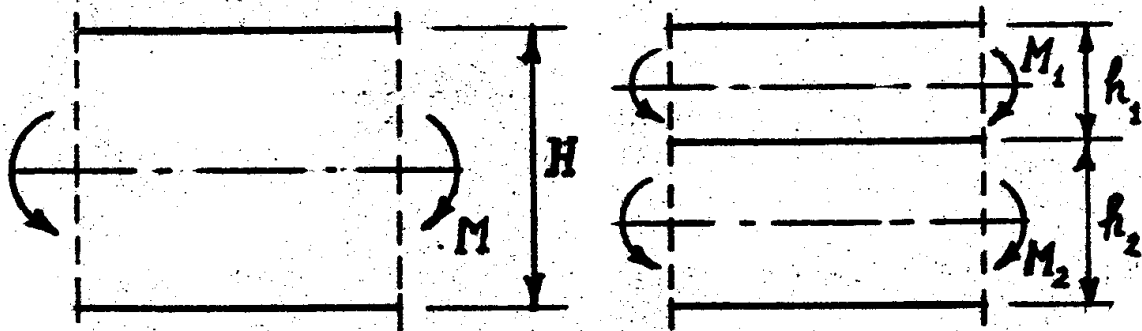


fig. 4

In corrispondenza della sezione considerata, il momento N verrebbe assorbito per un'aliquota N_1 dalla trave di altezza h_1 e per un'aliquota N_2 dall'altra, di altezza h_2 , avendosi dunque

$$N = N_1 + N_2 \quad (11)$$

Imponendo che le due travi rimangano a contatto fra di loro, a questa equazione se ne può associare una di congruenza, esprime l'eguaglianza fra le curvature delle due linee elastiche :

$$\frac{M_1}{EI_1} = \frac{M_2}{EI_2}$$

ovvero

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{l_1^3}{l_2^3} \quad (12)$$

Dalle (11) e (12) si trae immediatamente

$$M_1 = \frac{l_1^3}{l_1^3 + l_2^3} M, \quad M_2 = \frac{l_2^3}{l_1^3 + l_2^3} M$$

In particolare (fig. 5) per

$$l_1 = l_2 = \frac{l}{2}$$

si ha

$$M_1 = M_2 = \frac{M}{2}$$

e la curvatura dell'insieme, data da quella di ciascuna delle due travi componenti, risulta

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_1}{EI_1} = \frac{12 \cdot \frac{M}{2}}{Eb \left(\frac{l}{2}\right)^3} = 48 \frac{M}{Eb l^3}$$

Dal confronto di questa equazione con la (10) si deduce che per il fatto di averla divisa in due parti uguali, la trave, a pa

rita' di momento, presenta una curvatura quattro volte maggiore: risulta cioe' quadruplicata la flessibilita' del sistema, che percio' e' meglio utilizzabile come molla.

Il modulo di resistenza si riduce invece a meta'. Per la trave intera infatti esso e' dato da

$$\left(\frac{M}{\sigma_{max}} \right)_{(a)} = \frac{bH^2}{6}$$

mentre per il sistema delle due travi sovrapposte e'

$$\left(\frac{M}{\sigma_{max}} \right)_{(b)} = \frac{bH^2}{12}$$

Una data tensione massima viene dunque indotta nel secondo sistema da un momento flettente pari a meta' di quello che la induce nella trave intera e, per quanto si e' detto sopra, con una curvatura doppia.

Quest'ultima circostanza si puo' evidenziare con una semplice osservazione.

Data la proporzionalita' che, per la presupposta elasticita' lineare, sussiste tra tensioni e deformazioni e che, nello stato tensionale monoassiale indotto dalla flessione, e' espresso dalla ben nota formula

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E},$$

il diagramma delle tensioni, in una scala che tenga conto del coefficiente $\frac{1}{E}$, rappresenta anche quello degli allungamenti unitari e delle singole fibre. L'angolo di cui il diagramma delle σ e' inclinato rispetto alla sua fondamentale e' dunque proporzionale a quello di cui una sezione della trave e' ruotata, nella deformazione, rispetto ad altra a distanza unitaria e da' pertanto una misura della curvatura della linea elastica.

In base a cio' appare evidente (vedi fig.5) che a parita' di σ_{max} nel sistema delle due travi sovrapposte si ha curvatura doppia che nella trave unica.

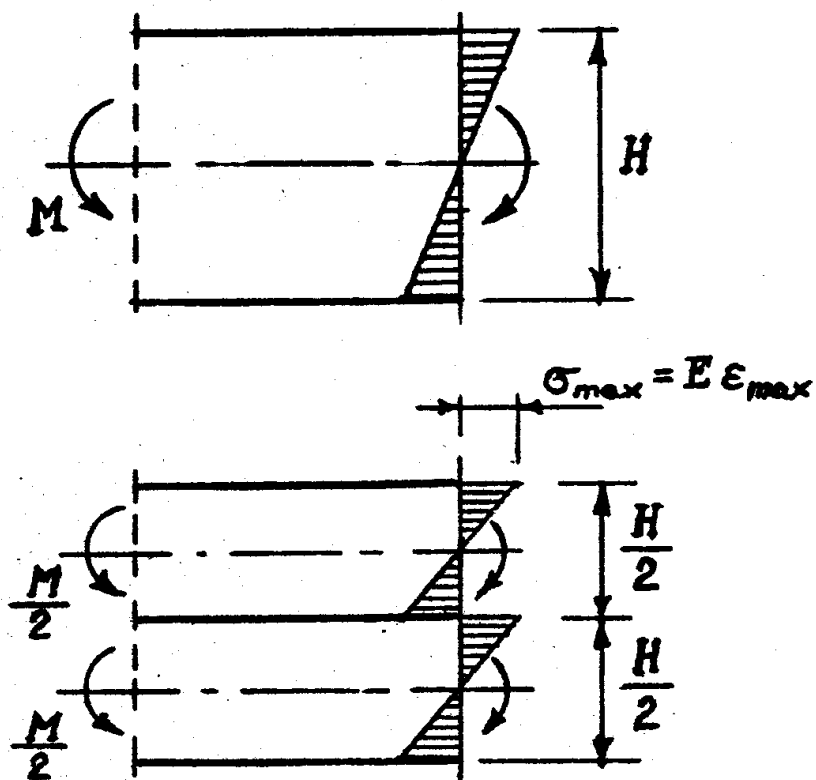


fig.5

Molle a lamina a pianta trapezia.

Per ovviare al secondo inconveniente delle molle a lamina a pianta triangolare (impossibilita' di applicare il carico sulle estremita') si adottano molle a pianta trapezia.

Le formule relative a questo tipo di molla si possono dedurre con procedimento semplice, se pure un po' laborioso.

Definito (fig.6) il rapporto di allargamento

$$\beta = \frac{b_1}{b_0}$$

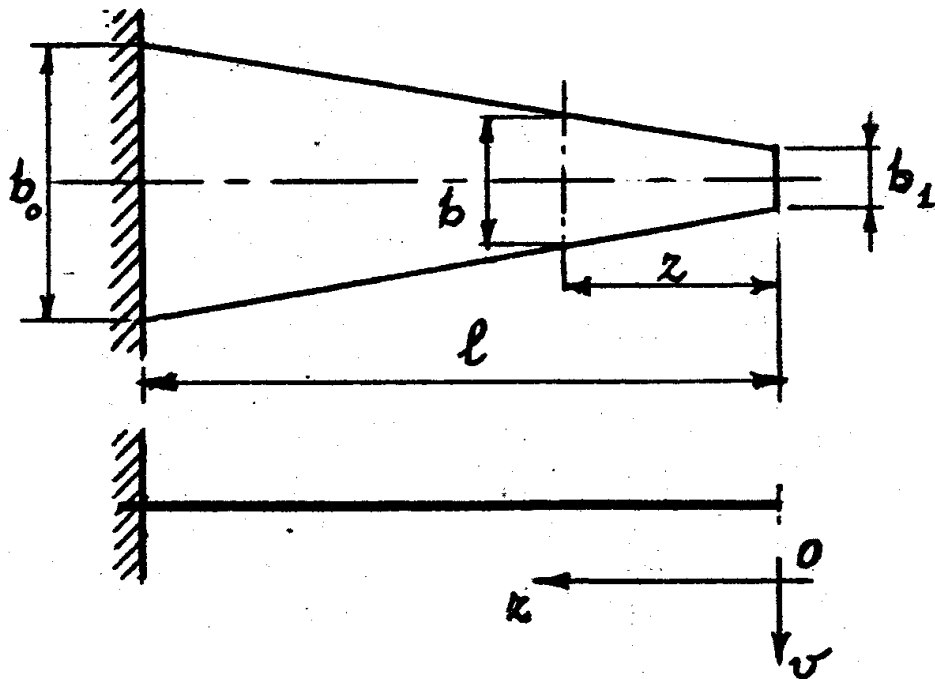


fig. 6

utilizzando similitudini fra triangoli si puo' scrivere

$$\frac{b - b_1}{z} = \frac{b_0 - b_1}{l}$$

da cui si trae facilmente

$$b = b_0 \left[\beta + (1 - \beta) \frac{z}{l} \right]$$

e quindi anche, essendo il momento d'inerzia della sezione

ne proporzionale alla larghezza

$$I = I_0 \left[\beta + (1 - \beta) \frac{z}{l} \right].$$

Sostituendo quest'espressione nell'equazione differenziale della linea elastica

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{Pz}{EI},$$

questa diventa

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{Pl}{EI_0} \frac{\frac{z}{l}}{\beta + (1 - \beta) \frac{z}{l}}$$

Da questa con successive integrazioni, tenendo conto delle condizioni ai limiti ($\varphi = 0$ e $v = 0$ per $z = l$) si ricavano le rotazioni e gli abbassamenti delle sezioni e quindi le grandezze caratteristiche della molla.

I risultati sono riportati nella tabella a pag. 16a che raccoglie le formule utili al calcolo delle molle a lamina fin qui trattate.

Condizioni di contatto tra le foglie di una molla a balestra.

La considerazione della molla a balestra come generata da quella a lamina a pianta triangolare o trapezia, cui si suole far ricorso per il calcolo di questo tipo di organi elastici, si basa sull'ipotesi che le foglie che la compongono, nelle condizioni di carico di cui s'è detto con riferimento alla fig. 3 (pag. 18), si comportino allo stesso modo che nella molla unica da cui s'immaginano ricavate, e quindi presentino linee elastiche eguali.

Tale ipotesi, come già s'è accennato, è però accettabile solo in prima approssimazione. In realtà se le foglie non vengono tenute assieme con staffe opportunamente posizionate, il contatto fra loro non può mantenersi, nell'inflessione, esteso alle superficie di giunzione.

Questo si può accertare esaminando un semplice caso particolare.

Si consideri una molla costituita da due sole foglie di diversa lunghezza, aventi sezioni rettangolari uguali, disposte e caricate come in fig. 7 a).

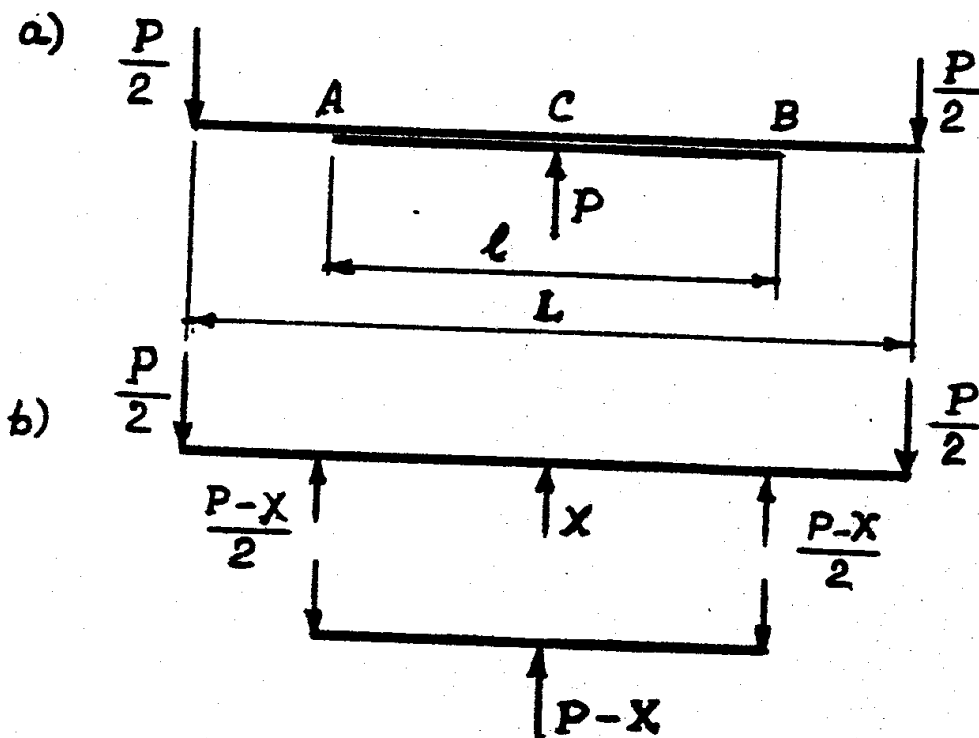


fig. 7

Si può mostrare che, nella deformazione, il contatto tra le due foglie non rimane esteso a tutta la lunghezza della più piccola di esse, ma ha luogo solo negli estremi A e B e, in particolari condizioni, anche in C .

Ragionando per assurdo, si supponga che la sollecitazione si trasmetta per contatto esteso a tutto il tratto AB . Allora

sulle due foglie agiranno, nella zona di contatto, due distribuzioni di carico direttamente opposte.

Detto q il valore, in modulo, del carico per unita' di lunghezza in corrispondenza della generica sezione, le equazioni differenziali delle foglie superiore ed inferiore nella zona di contatto sono rispettivamente

$$\frac{d^4 y}{dz^4} = -EIq \quad , \quad \frac{d^4 y}{dz^4} = EIq \quad .$$

Siccome i primi membri di questa relazione sono uguali tra di loro, perche' le foglie, per la presupposta condizione di contatto, assumono la stessa configurazione, deve aversi

$$q = -q$$

e quindi $q = 0$.

Se ne deduce che non ci puo' essere contatto esteso fra i due corpi. Il contatto puo' avvenire al piu' nei punti A , B e C .

Con riferimento allo schema e notazioni di fig. 7b, la condizione di congruenza in C impone che le frecce delle due foglie siano uguali, cioe'

$$\frac{P}{2} \frac{L-l}{2} l^2 + \frac{X l^3}{48EI} = \frac{(P-X) l^3}{48EI}$$

Risolvendo rispetto ad X si ricava

$$X = \frac{5l - 3L}{4l} P$$

Questa relazione esprime che per $l > \frac{3}{5}L$, X assume valore po

sitivo, cioè il carico si trasmette anche attraverso il punto C mentre per $l < \frac{3}{5} L$, X risulta negativo, cosa che non trova significato fisico, potendo la reazione X agire soltanto col verso indicato nello schema; se ne deduce che nel secondo caso si ha contatto solo in A e B e non in C .

Da questo risultato si può dedurre che, anche nel caso di molle composte da più di due foglie, le azioni di contatto si addensano nelle zone di estremità delle foglie stesse.

Curva caratteristica di una molla in presenza di attrito

In presenza di attrito la curva che caratterizza il comportamento di una molla sotto l'azione di un carico variabile non coincide con la caratteristica intrinseca di cui si è parlato innanzi (con riferimento alla quale si è presupposta l'assenza di cause dissipative e l'applicazione statica del carico). La curva stessa, in particolare, presenterà andamenti diversi a seconda che si riferisca a variazioni del carico in aumento o in diminuzione: propriamente la curva relativa ad accrescimento della forza deformante (fase di carico) correrà al di sopra e quella relativa a diminuzione del carico (fase di scarico) al di sotto della curva intrinseca. Infatti il carico P deve in ogni istante equilibrare, oltre alla reazione elastica della molla, le resistenze di attrito che nella fase di carico agiscono in concomitanza con la reazione elastica e nella fase di scarico in opposizione ad essa.

Considerando un ciclo completo, costituito dalla successione di una fase di carico fino ad una data freccia f_0 e di una di scarico con annullamento della deformazione (vedi figura), le due curve corrispondenti delimitano una superficie chiusa, la cui area, come è facile comprendere, rappresenta l'energia dissipata nel ciclo a causa dell'attrito.

Durante l'inflessione di una molla a balestra hanno luogo strisciamenti longitudinali tra le varie foglie a contatto; infatti dalle due parti della superficie di separazione tra due foglie contigue vengono a trovarsi le fibre appartenenti alla zona di trazione (e quindi di allungamento) di una di esse e

quelle appartenenti alla zona di compressione (e perciò di accorciamento) dell'altra.

Tali strisciamenti provocano, in corrispondenza dei punti dove sono addensati gli sforzi di contatto, dispersioni di energia per attrito. Questo effetto puo' considerarsi vantaggioso nelle applicazioni delle molle a balestra quali sospensioni dei veicoli, perche' comporta la dissipazione di parte dell'energia derivante dagli urti dovuti alle asperita' del suolo e favorisce lo smorzamento delle oscillazioni innescate dagli urti stessi (effetto ammortizzatore).

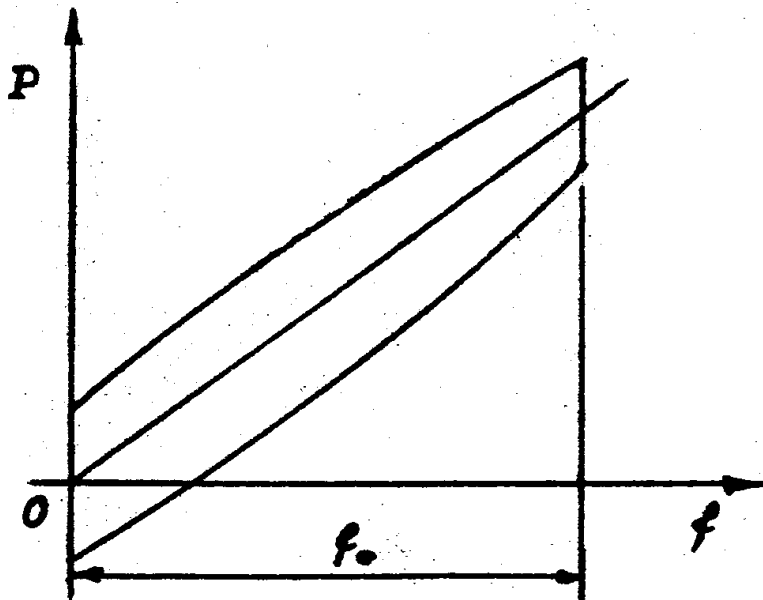


fig. 8

Il diagramma di deformabilità relativo ad un ciclo di carico e scarico di una molla a balestra sarà pertanto del tipo indicato in fig. 8.

Molle di torsione

Sono quelle nelle quali la caratteristica di sollecitazione prevalente è quella torsionale.

Le molle di torsione di più diffuso impiego sono realizzate con barre a sezione circolare o rettangolare. Per il loro studio conviene quindi richiamare brevemente le formule della torsione nelle travi aventi tali sezioni.

Il parametro che individua la deformazione corrispondente a questo tipo di sollecitazione è l'angolo di torsione unitario θ_1 (riferito all'unità di lunghezza della trave) che si esprime nella forma

$$\theta_1 = q \frac{M_t}{GI_p} \quad (13)$$

intendendosi

q fattore di torsione (adimensionale),

M_t momento torcente .

G modulo di elasticità tangenziale,

I_p momento d'inerzia polare della sezione.

Dalla (13) si può trarre la rigidezza unitaria della trave

$$c_1 = \frac{M_t}{\theta_1} = \frac{GI_p}{q} \quad (14)$$

Per questo particolare tipo di sollecitazione la considerazione dei parametri unitari θ_1 e c_1 è utile in quanto nel caso, in pratica frequente, che nella trave, supposta a sezione uniforme, sia uniforme anche il momento torcente, i corrispondenti valori θ e c dell'angolo di torsione e della rigidezza relativi ad un tratto di lunghezza qualsiasi si deducono dalla (13) e dalla (14) rispettivamente per semplice moltiplicazione e divisione per la lunghezza stessa.

Nello stesso caso il coefficiente di utilizzazione sarà in vece indipendente dalla lunghezza della trave e potrà essere calcolato con riferimento al tratto unitario, che ha volume

$V_1 = A$, con A area della sezione. Si avra'

$$m = \frac{\frac{1}{2} N_t \theta_1}{\frac{\tau_0^2}{2G} A} = q \frac{W_t^2}{AI_P}, \quad (15)$$

dove W_t indica il modulo di resistenza a torsione.

Sezione circolare

Per questa sezione e' $q=1$ e le formule della torsione risultano particolarmente semplici. Se d e' il diametro della sezione, si ha

$$I_P = \frac{\pi d^4}{32}, \quad W_t = \frac{\pi d^3}{16}$$

e quindi

$$\theta_1 = \frac{32 N_t}{\pi G d^4} \approx 10,2 \frac{N_t}{G d^4} \quad (16)$$

$$c_1 = \frac{\pi G d^4}{32} \approx 0,098 G d^4$$

$$\tau_0 = \frac{16 N_t}{\pi d^3} = \frac{G d}{2} \theta_1 \approx 5,1 \frac{N_t}{d^3}$$

Il coefficiente di utilizzazione in condizione di momento torcente uniforme risulta, in base alla (15),

$$m = 0,5$$

Sezione rettangolare

Detti a e b i lati della sezione e posto

$$\gamma = \frac{a}{b} ,$$

si ha

$$I_p = \frac{ab}{12} (a^2 + b^2) = \frac{1 + \gamma^2}{12} ab^3 ,$$

$$\theta_1 = q \frac{12}{1 + \gamma^2} \frac{N_t}{Gab^3} .$$

Essendo il fattore di torsione q una funzione trascendente del rapporto γ , tale sarà anche la quantità

$$\beta = \frac{12q}{1 + \gamma^2} . \quad (17)$$

Assumendo questo simbolo, l'equazione precedente si può semplificare nella forma

$$\theta_1 = \beta \frac{N_t}{Gab^3} .$$

da cui si ha anche

$$c_1 = \frac{1}{\beta} Gab^3$$

Poiché anche il modulo di resistenza a torsione risulta affetto da un coefficiente che è funzione trascendente di γ , esso si può esprimere nella forma

$$W_t = \frac{ab^2}{\alpha} \quad (18)$$

includendo così in α tale coefficiente.

La massima tensione tangenziale nella sezione (che si raggiunge agli estremi della mediana minore) risulta

$$\tau_0 = \frac{M_t}{W_t} = \alpha \frac{M_t}{ab^2} = \frac{\alpha}{\beta} Gb\theta_1 \quad (19)$$

ed il coefficiente di utilizzazione per momento torcente uniforme, come può dedursi dalla (15) tenendo conto delle (17) e (18) assume la forma

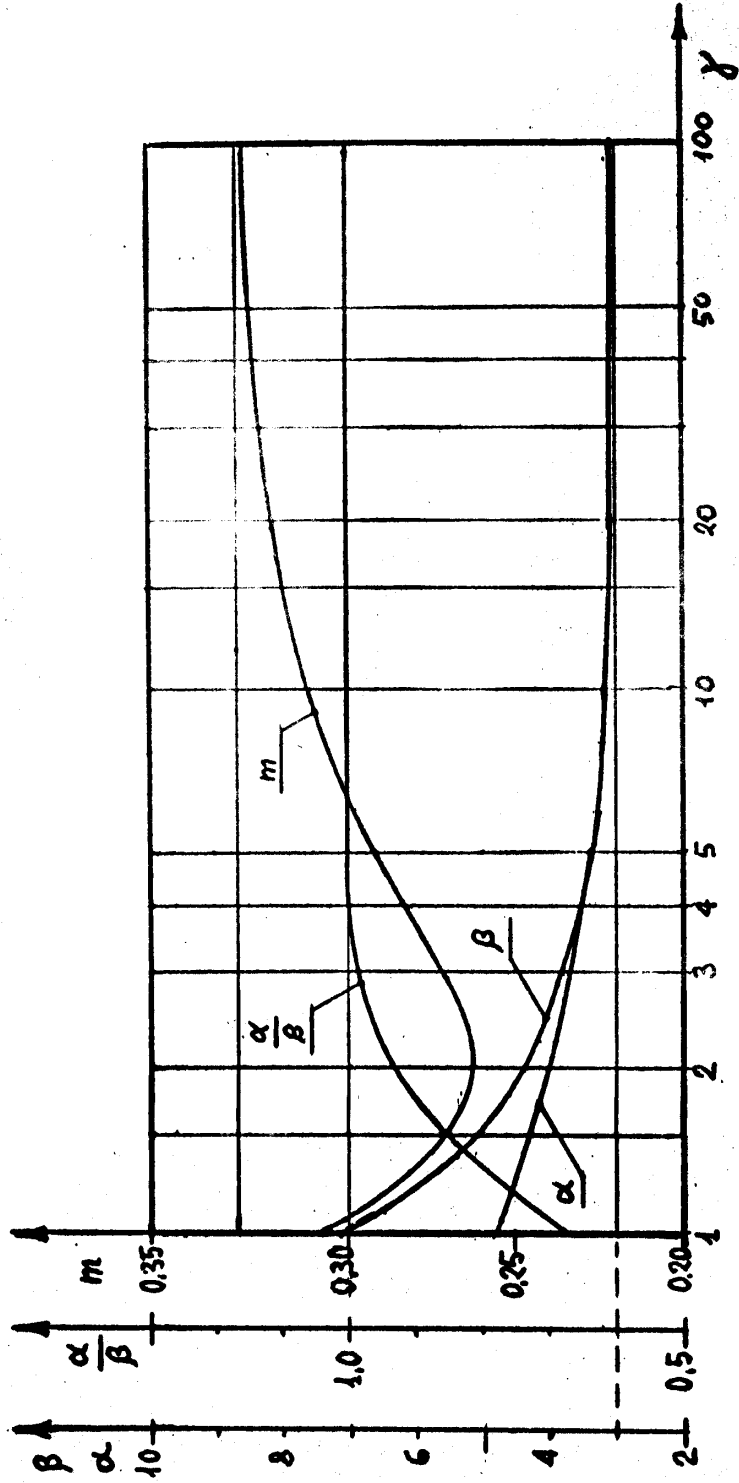
$$m = \frac{\beta}{\alpha^2} .$$

Per l'impiego delle formule ora scritte, nella tabella a pag. 31a sono riportati i valori di α e β corrispondenti a valori crescenti di γ ; la tabella fornisce anche i valori del rapporto $\frac{\alpha}{\beta}$ utili per la determinazione di τ_0 in funzione di θ_1 con la (18), nonché quelli del coefficiente di utilizzazione m . Nella stessa pagina sono resi i corrispondenti diagrammi di queste funzioni. È interessante osservare l'andamento di m che, partendo dal valore 0,308 assunto per $\gamma = 1$, diminuisce al crescere di γ fino a ridursi al minimo (0,264) per $\gamma \approx 2$, per poi aumentare di nuovo assumendo nuovamente il valore iniziale per $\gamma \approx 8$ e tendendo al valore limite 1/3 al crescere indefinito di γ .

Sotto l'aspetto dell'utilizzazione del materiale può dunque dirsi che, nelle molle di torsione, la miglior condizione si consegue con l'impiego di barre a sezione circolare, per le quali si ha $m = 0,5$; più svantaggioso è l'impiego delle barre a sezione rettangolare, in particolar modo con rapporto tra i lati intorno a 2, mentre lo svantaggio si riduce al minimo

COEFFICIENTI PER LA TORSIONE NELLE TRAVI A SEZIONE RETTANGOLARE

$\gamma = \frac{a}{b}$	1.0	1.1	1.2	1.25	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.75	1.8	2.0	2.25	2.5	3.0	4.0	5.0	6.0	8.0	10.0	20.0	∞
α	4.804	4.67	4.57	4.52	4.48	4.40	4.33	4.27	4.21	4.18	4.16	4.07	3.97	3.88	3.74	3.55	3.43	3.35	3.26	3.20	3.10	3
β	7.114	6.49	6.02	5.82	5.65	5.35	5.11	4.91	4.74	4.67	4.60	4.37	4.16	4.01	3.80	3.56	3.43	3.35	3.26	3.20	3.10	3
$\frac{\alpha}{\beta}$	0.676	0.720	0.759	0.777	0.797	0.822	0.847	0.870	0.888	0.895	0.904	0.931	0.954	0.967	0.984	1.00						
$m = \frac{\beta}{\alpha^2}$	0.308	0.298	0.288	0.285	0.282	0.276	0.273	0.269	0.267	0.267	0.266	0.264	0.264	0.266	0.272	0.282	0.292	0.298	0.307	0.312	0.323	$\frac{1}{3}$



nel caso della sezione quadrata o di quella rettangolare a forte allungamento. Per questi ultimi due casi si riportano qui di seguito le formule principali con i valori tratti dalla tabella.

Sezione quadrata ($\gamma = 1$)

$$\theta_1 = 7,114 \frac{M_t}{Ga^4}$$

$$c_1 = 0,141 Ga^4$$

$$\tau_0 = 4,804 \frac{M_t}{a^3} = 0,676 Ga\theta_1$$

$$m = 0,308$$

Sezione rettangolare allungata ($\gamma \geq 4$)

$$\theta_1 = (3,56 \div 3) \frac{M_t}{Gab^3}$$

$$c_1 = (0,281 \div 0,333) Gab^3$$

$$\tau_0 = (3,55 \div 3) \frac{M_t}{ab^3} = Gb\theta_1$$

$$m = 0,282 + 0,333$$

Barra di torsione

La piu' semplice configurazione che si puo' dare ad una molla di torsione e' quella di una barra rettilinea incastrata ad un estremo e caricata all'altro con una coppia torcente o con una forza che induce torsione (agente cioe' in un piano normale all'asse della trave, con un certo braccio rispetto all'asse stesso).

In questo secondo caso la barra deve essere vincolata in modo da escludere la presenza in essa delle sollecitazioni di flessione e taglio, cioe' deve essere supportata in corrispondenza dell'estremita' caricata, come indicato in figura 9.

Il momento torcente e' uniforme nella barra; lo spostamento del punto di applicazione della forza e' allora un arco di cerchio di lunghezza

$$s = R\theta = Rl\theta_1 \quad (20)$$

avendo indicato con R la distanza del punto stesso dall'asse; con l la lunghezza della barra.

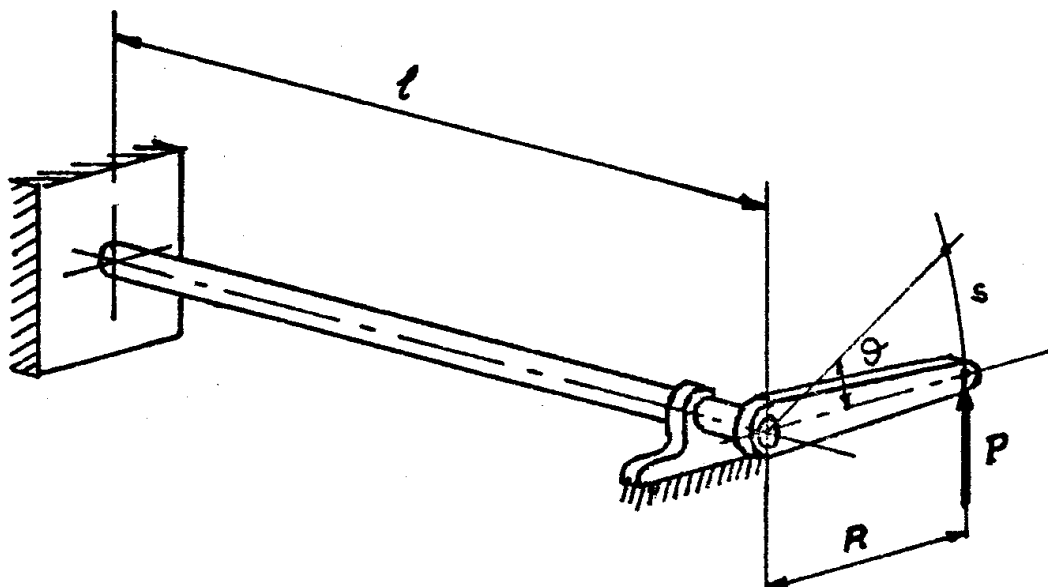


fig. 9

Allo schema di fig. 9 corrisponde la cosiddetta "barra di torsione", impiegata nelle sospensioni di autovetture: la barra è vincolata al telaio della vettura; all'estremità della manovella è fissato il mozzo di una delle ruote; il carico P è costituito dalla reazione del suolo al peso del veicolo ed ai sovraccarichi verticali dovuti ad irregolarità del suolo stesso, per la parte che grava sulla ruota considerata.

In questo caso la forza P agisce costantemente in direzione verticale, per cui il suo braccio rispetto all'asse di torsione varia con la deformazione e la freccia che, secondo la definizione che se ne è assunta, è la proiezione dello spostamento s sulla direzione della forza, non è a questa proporzionale: la molla dunque è a rigidità variabile.

Come agevolmente si deduce dalla fig. 10 (dove, facendo riferimento al caso in esame, P si è considerata verticale e agente

dal basso verso l'alto) se si indica con α l'angolo di cui, a molla scarica, la manovella è ruotata rispetto al piano assiale normale alla direzione di P , il momento torcente indotto sulla barra dalla forza P , cui corrisponde la torsione θ , è

$$M_t = PR \cos(\theta - \alpha) \quad (21)$$

Se si indica con l la lunghezza della barra e la sua sezione si suppone circolare di diametro d , in base alle equazioni richiamate innanzi, M_t è legato a θ dalla relazione

$$M_t = \frac{\pi}{32} \frac{Gd^4}{l} \theta$$

tenendo conto della quale, si può trarre dalla (21) l'espressione di P in funzione di θ :

$$P = \frac{\pi}{32} \frac{Gd^4}{Rl} \frac{\theta}{\cos(\theta - \alpha)} \quad \text{ad)}$$

D'altra parte, come mostra la fig. 10, la freccia è

$$f = R [\sin \alpha + \sin(\theta - \alpha)] \quad (23)$$

La rigidezza in corrispondenza del generico valore del α

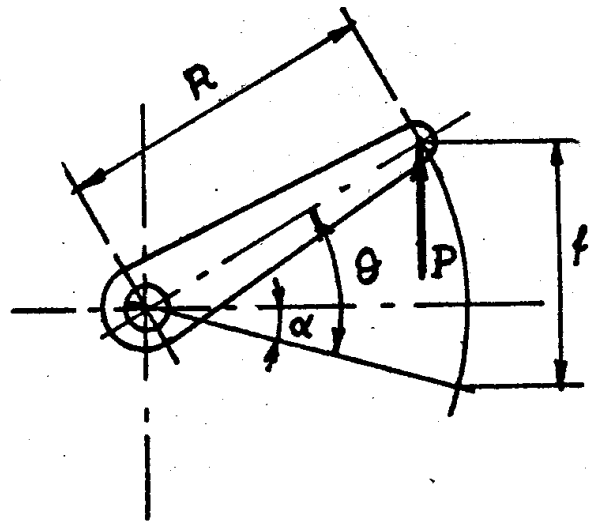


fig. 10

rico e' data da

$$c = \frac{dP}{df} = \frac{dP}{d\theta} \frac{d\theta}{df}$$

da cui, utilizzando le (21) e (22), si ha

$$c = \frac{\pi}{32} \frac{Gd^4}{R^2 l} \frac{1 + \theta \operatorname{tg}(\theta - \alpha)}{\cos^2(\theta - \alpha)} \quad (24)$$

La rigidezza dunque varia con θ ed e' minima per $\theta = \alpha$, cioe' quando la manovella e' normale alla forza e questa assume rispetto all'asse della barra il suo braccio massimo R .

Altro organo elastico di impiego automobilistico, analogo al precedente, e' la "barra stabilizzatrice": si tratta di una barra vincolata al telaio della vettura le cui estremita' sono collegate, mediante due bracci-manovelle, ad una coppia di ruote parallele del veicolo. Ogni qualvolta per effetto della forza centrifuga agente in curva sulla vettura, o a causa di differenti asperita' del suolo incontrate dalle due ruote, le loro sospensioni elastiche assumono frecce differenti, la barra viene ad essere soggetta a torsione ed oppone la sua reazione elastica alla causa sbilanciante tendendo a ristabilire il parallelismo tra lo asse della coppia di ruote ed il telaio della vettura.

Il comportamento di questa molla di torsione non differisce sostanzialmente da quello della molla precedentemente esaminata pur essendo diversa la funzione a cui essa e' adibita. Il suo schema di carico e' ancora riconducibile alla fig.9 ed il suo studio puo' essere impostato in modo del tutto analogo al caso precedente.

Se la forza torcente P si mantiene tangente alla traiettoria del suo punto di applicazione (come accade ad es. quando essa agisce tangenzialmente ad una ruota o ad un settore circolare coassiale con la barra) il suo braccio e' costante ed uguale ad R .

In tal caso il momento torcente

$$M_t = PR \quad (25)$$

e' indipendente dall'angolo di torsione, che a sua volta e' proporzionale a P .

Per barra di lunghezza l con sezione circolare di diametro d e'

$$\theta = \frac{32}{\pi} \frac{PR}{Gd^4} l$$

La freccia coincide con lo spostamento circolare s fornito dalla (13) ed e' quindi anch'essa proporzionale al carico:

$$f = \frac{32}{\pi} \frac{PR^2}{Gd^4} l$$

La rigidezza percio' e' costante e risulta

$$c = \frac{\pi}{32} \frac{Gd^4}{R^2 l}$$

corrispondente al valore minimo fornito dalla (24) per il caso della forza agente con direzione costante.

Molla elicoidale

Una barra elastica puo' comportarsi come una molla di torsione se e' configurata come una spira circolare piane e soggetta a due forze uguali ed opposte agenti lungo l'asse della spira, applicate alle estremita' di due bracci radiali rigidi come indicato in fig. 11.

Letto P il modulo delle due forze ed R il raggio della spira in corrispondenza dell'asse della barra, in ogni sezione di questa si ha momento torcente

$$M_t = PR. \quad (25)$$

La deformazione non comporta una rotazione relativa fra le sezioni estreme della spira, cui fanno capo i due bracci radiali.

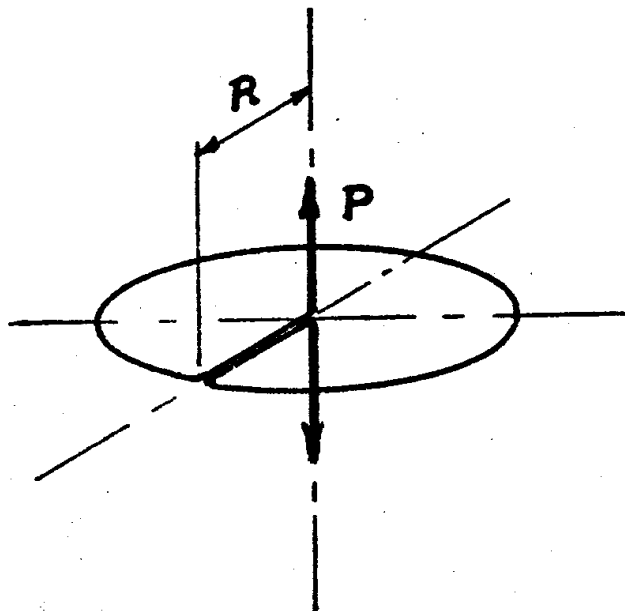


fig. 11

Cio' si spiega considerando la configurazione circolare della barra ed in particolare il fatto che le sezioni di estremita', pur essendo parallele fra loro, come nel caso della barra rettilinea, sono da considerare ruotate l'una rispetto all'altra di 2π intorno all'asse della spira.

Fra tali sezioni si ha uno spostamento relativo rettilineo parallelo all'asse della spira, spostamento che, per la presupposta rigidità dei due bracci

radiali, si trasmette identicamente a questi e quindi ai punti di applicazione delle due forze opposte. Esso risulta uguale a quello subito, su traiettoria circolare, dal punto di applicazione della forza P nel caso che questa agisca su una barra di egual lunghezza, ad asse rettilineo, secondo lo schema di fig. 9, mantenendosi tangente alla traiettoria.

Detto spostamento, che e' la freccia della spira considerata, e' data dunque dalla (20) e vale pertanto

$$f = 2\pi R^2 \theta_1 = \frac{\pi D^2}{2} \theta_1, \quad (26)$$

essendosi indicato con D il diametro della spira.

Lo stato tensionale e' quello corrispondente alle sollecitazioni di torsione e taglio, uniformemente distribuite nella spira.

Nella deformazione la spira, deviando dal proprio piano, assume forma elicoidale. Cio' comporta la comparsa in essa delle sollecitazioni di flessione e di sforzo normale e una variazione del braccio delle due forze assiali rispetto alla generica sezione; tali effetti sono pero' trascurabili se la frec-

cia e' piccola rispetto al diametro della spira.

Questa particolare configurazione della molla di torsione presenta rispetto a quella ad asse rettilineo, il duplice vantaggio di fornire freccia rettilinea senza sensibile variazione del momento torcente (e perciò con rigidezza sensibilmente costante) e di ridurre notevolmente, a parità di rigidezza, l'ingombro della molla.

Questi vantaggi si possono accentuare avvolgendo la barra secondo più spire complanari ovvero sovrapposte. La prima soluzione conduce alla molla a spirale piana, che però trova più larga applicazione come molla di flessione che di torsione; la altra porta alla configurazione ad elica cilindrica o conica, a seconda che il diametro di avvolgimento delle spire si tenga costante o variabile linearmente lungo l'asse dell'elica.

Le molle elicoidali vengono prevalentemente impiegate appunto come molle di torsione; quelle cilindriche, di gran lunga più diffuse delle coniche, sono caratterizzate dal fatto che un carico assiale induce in esse momento torcente uniforme. Da ciò deriva una formulazione particolarmente semplice delle equazioni utili al loro calcolo.

Nella molla elicoidale un carico assiale induce necessariamente, in uno con le sollecitazioni di torsione e taglio, quelle di flessione e sforzo normale che nella spira piana di figura 11 compaiono, come s'è detto, solo a seguito della deformazione.

Considerando una molla ad elica cilindrica soggetta a due forze assiali opposte, di modulo P , applicate a due bracci radiali rigidi di estremità, come indicato nello schema di figura 12, le caratteristiche di sollecitazione presenti nella generica sezione della barra si determinano agevolmente trasportando nel baricentro della sezione la forza P agente ad un estremo ed associando ad essa la coppia di trasporto $V = PR$ agente nel piano meridiano passante per il baricentro stesso.

Decomponendo la forza trasportata secondo la normale baricentrica alla sezione ed il piano di questa, si hanno rispettivamente le sollecitazioni di sforzo normale e taglio che, indicando con β l'angolo d'inclinazione dell'elica secondo cui è configurato l'asse della barra, sono

$$V = P \sin \beta, \quad T = P \cos \beta.$$

Analogamente, come appare dalla figura (dove le coppie sono rappresentate con gli usuali vettori a doppia punta), la coppia di trasporto trova una componente agente nel piano della sezione, rappresentata da un vettore diretto lungo la tangente all'elica, ed una agente nel piano passante per la tangente e la normale all'elica e quindi rappresentata da un vettore diretto lungo la binormale. Tali due componenti individuano rispettivamente le sollecitazioni di torsione e flessione e valgono

$$M_t = PR \cos \beta, \quad M_f = PR \sin \beta.$$

Alla deformazione torsionale si sovrappongono dunque quelle corrispondenti alle altre caratteristiche di sollecitazione, che hanno comunque tutte distribuzione uniforme. In particolare la flessione comporta una diminuzione ovvero un aumento della curvatura della barra elicoidale, a seconda che le due forze assiali P agiscano rispettivamente con verso tale da estendere (come in fig. 12) o da comprimere la molla.

Con la deformazione varia l'angolo β e quindi l'influenza del carico sulla molla; in base alle formule ora scritte le caratteristiche di sollecitazione, e con esse la deformazione, non variano proporzionalmente al carico: la molla dunque non presenta caratteristica lineare.

Tuttavia, i valori di β usualmente adottati in queste molle

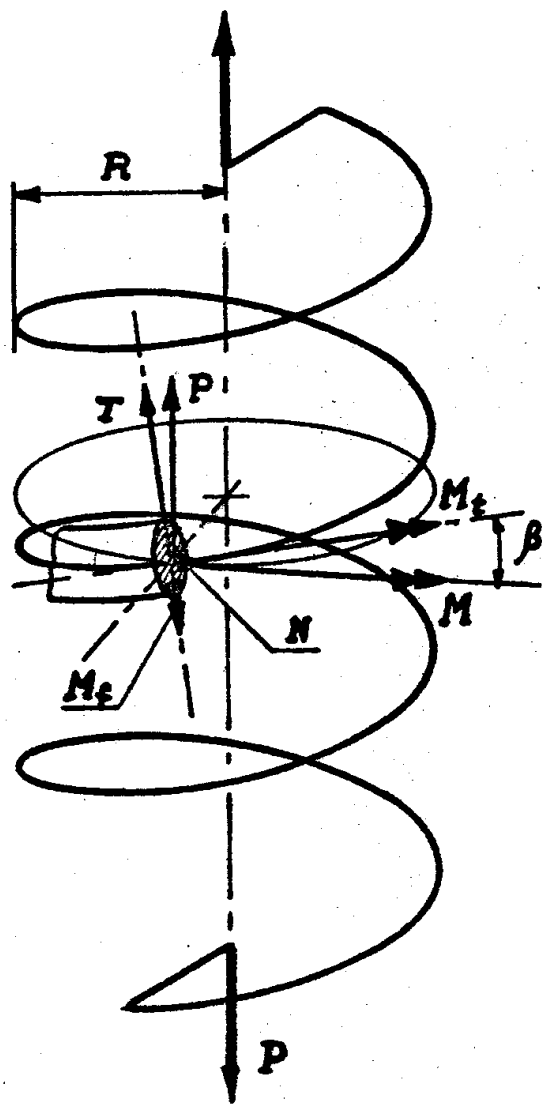


fig. 12

sono abbastanza piccoli da render lecito di trascurare N ed M_f rispetto a T ed M_t .

In effetti le molle elicoidali vengono di norma impiegate, in base ad ovvi criteri di minimo ingombro e di buona utilizzazione del materiale, in modo da assumere, in esercizio, configurazioni poco discoste da quella corrispondente all'inclinazione minima dell'elica, e cioè alla condizione di contatto fra le spire, per la quale il passo dell'elica è uguale alla dimensione assiale d_a della sezione meridiana della barra e si ha pertanto, detto D il diametro di avvolgimento,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{d_a}{\pi D}$$

Ad esempio, per $\frac{d_a}{D} = \frac{1}{8}$, si ha

$$\operatorname{tg} \beta_{\min} = 0,03979 \quad (\beta_{\min} = 2^{\circ}20')$$

ed in esercizio l'inclinazione dell'elica, che fornisce il valore comune dei rapporti fra N e T , e fra M_f ed M_t , assumerà in pratica tutt'al più valore doppio del precedente.

Considerando che la deformazione torsionale ha sull'entità della freccia influenza di gran lunga prevalente rispetto a quelle connesse con le altre caratteristiche di sollecitazione, si comprende come nel calcolo della freccia e quindi della rigidità si possa, senza errore apprezzabile, tener conto del solo momento torcente assumendo inoltre, come per la spirale piana,

$$M_t = PR = \frac{PD}{2} \quad (25)$$

Del pari trascurabile sarà di norma la variazione della rigidità con il carico, attesa la lieve entità delle variazioni di β in esercizio, per cui una simile molla si potrà ordinariamente considerare senz'altro a caratteristica lineare, almeno entro i limiti delle variazioni di carico previste in esercizio.

Anche ai fini della determinazione delle tensioni per i

$2\pi R = \lambda / \cos \beta$

2π

$r d = \lambda / \cos \beta$

calcoli di resistenza si puo' di norma tener conto, con sufficiente approssimazione, della sola sollecitazione di torsione, trascurando l'inclinazione dell'elica.

La lunghezza di una barra configura^{ta} secondo un'elica cilindrica di angolo di inclinazione β e di diametro D , di cui n sia il numero delle spire, e'

$$l = n \frac{\pi D}{\cos \beta}$$

La freccia di una simile molla, in analogia con la formula (23) valida per la spira circolare, e' data quindi da

$$f = n \frac{\pi r^2}{2 \cos \beta} \theta_1$$

In pratica anche in queste espressioni, per i motivi fin qui esposti, si suole assimilare $\cos \beta$ all'unita' ed assumere

$$l = n \pi D$$

$$f = n \frac{\pi r^2}{2} \theta_1 \quad (27)$$

Per la determinazione esatta di θ_1 in funzione di M_t e quindi di P , così come per quella dello stato tensionale, va tenuto conto della configurazione elicoidale della barra.

Nei calcoli di prima approssimazione si possono utilizzare le formule valide per le travi ad asse rettilineo. Per i casi di maggior interesse pratico le principali grandezze utili al fine di progetto di verifica si possono determinare apponendo alle formule di prima approssimazione coefficienti correttivi forniti da apposite tabelle e diagrammi.

Nel caso di barra a sezione circolare di diametro d si utilizzeranno quindi le (16) (pag.30), introducendovi il momento torcente dato dalla (25). Nell'espressione della freccia, ricavata dalla (27), ed in quella della tensione tangenziale massima si introdurranno poi rispettivamente i coefficienti correttivi λ_1 ed λ_2 , i cui valori sono forniti dal diagramma

(25) $M_t = P \cdot R$
 $f = \frac{\pi D^2}{2} \cdot \theta_1$

lista

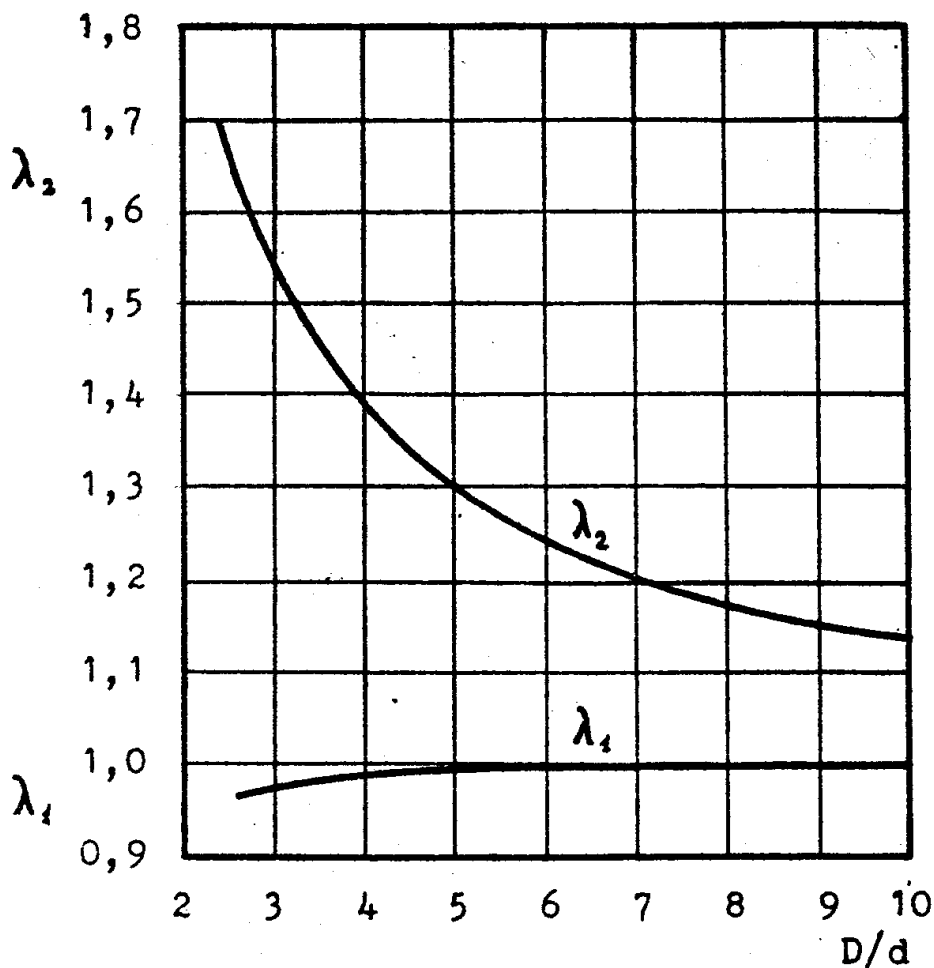


fig. 13

$E = 40\,000 \text{ MPa}$
 acciaio

di fig. 13 in funzione del rapporto D/d . Si ottiene in tal modo

$$f = 8 \lambda_1 n \frac{PD^3}{Gd^4}$$

$$c = \frac{Gd^4}{8 \lambda_1 n D^3}$$

(28)

$$\tau_0 = \frac{8 \lambda_2}{\pi} \frac{PD}{d^3} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{Gd}{\pi n D^2} f$$

L'andamento delle curve di fig. 13 mostra che, per quanto riguarda il calcolo della freccia (e quindi della rigidezza), le ipotesi semplificative adottate non comportano praticamente errore alcuno quando sia $D/d > 5$, mentre l'errore risulta comunque esiguo nel caso, peraltro poco frequente, che si abbia $D/d < 5$.

Nel calcolo della tensione massima invece l'errore comportato dall'approssimazione è rilevante e crescente al diminuire di D/d ; esso si riduce a circa il 10% solo per $D/d > 10$.

Particolarità costruttive delle molle elicoidali

Per la costruzione delle molle elicoidali di torsione vengono impiegate barre a sezione circolare (fili o tondini) (figure 14 a) e b)) o a sezione rettangolare (fig. 14 c)).

Di gran lunga prevalente è l'uso della sezione circolare che comporta maggiore semplicità costruttiva e migliore utilizzazione del materiale.

La barra viene avvolta su di una sagoma cilindrica o conica, o di altra forma, a seconda della molla che si vuole produrre.

L'avvolgimento si effettua a freddo o a caldo, dipendentemente dalla dimensione radiale d_r della sezione (coincidente evidentemente col diametro d di quest'ultima, se è circolare). Di norma si ricorre alla prima lavorazione quando $d_r \leq 13$ mm alla seconda per valori maggiori.

In quanto segue faremo riferimento alle molle ad elica cilindrica con inclinazione uniforme delle spire, che sono quelle di più diffuso impiego.

Il rapporto di avvolgimento D/d_r è compreso di norma tra i valori 4 e 25; in pratica non è mai minore di 3.

L'angolo di inclinazione dell'elica non supera ordinariamente gli 8° ed in esercizio si tiene al di sotto di questo limite; ciò rende senz'altro accettabili le formule approssimate prospettate innanzi, come la (25) e la (27), in cui si trascura l'inclinazione.

Per produrre una molla cilindrica con sezione quadrata o rettangolare delle spire (fig. 14 c)) va utilizzata una barra a sezione trapezia isoscele, da avvolgere in guisa che la base minore del trapezio corrisponda all'intradosso delle spire,

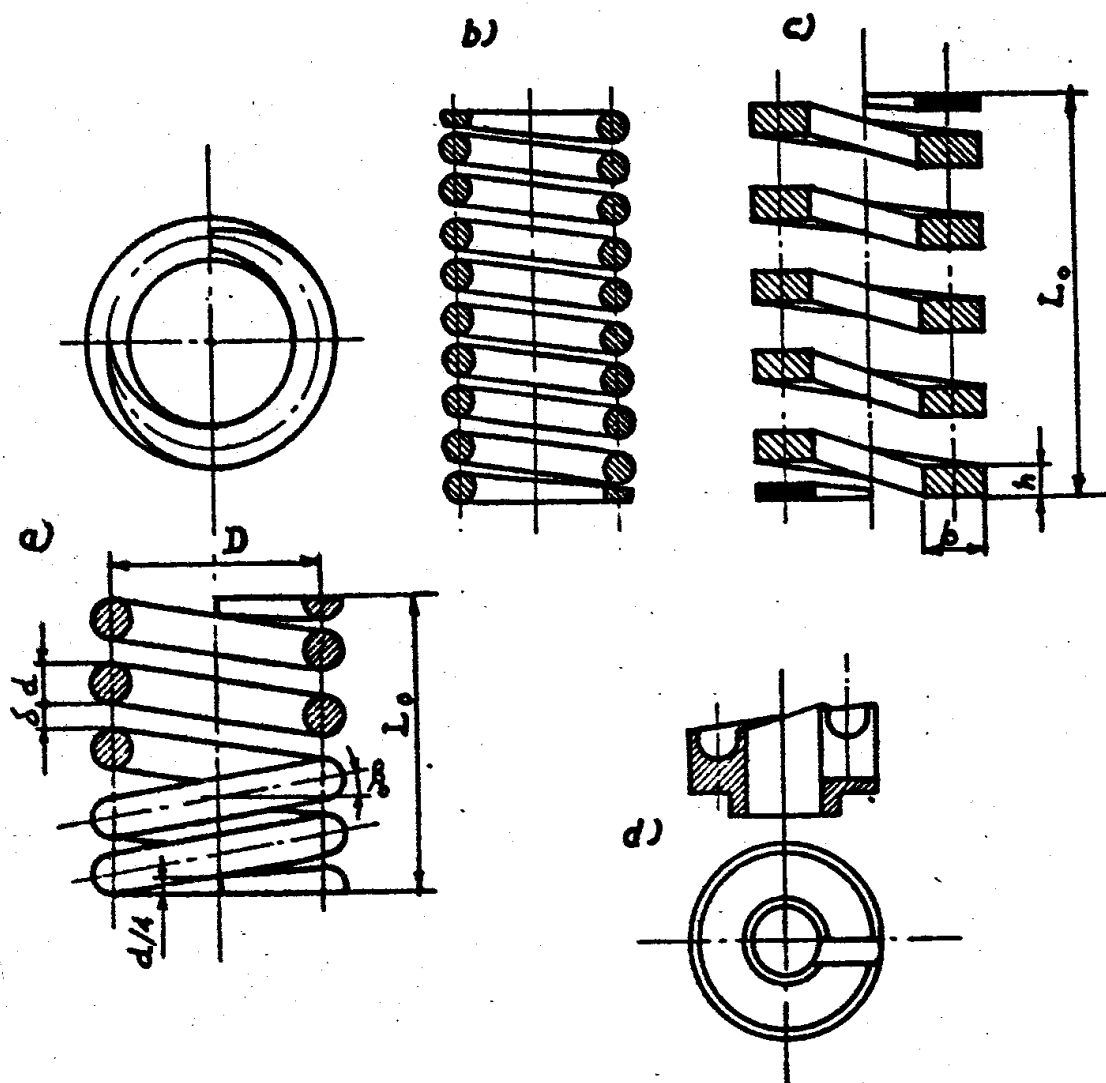


fig. 14

e con rapporto tra le due basi commisurato alla curvatura da conferire alla barra, così che risulti compensata la deformazione trasversale che si accompagna all'inflessione (contrazione nella zona delle fibre tese e dilatazione in quella delle fibre compresse) e la sezione dopo l'avvolgimento abbia la forma voluta.

Con riferimento all'utilizzazione del materiale la sezione quadrata, per quanto è esposto a pag. 32, è da preferire a quella rettangolare.

Le molle elicoidali presentano caratteristiche costruttive diverse a seconda che siano "da compressione", cioè da assoggettare a carico assiale agente in senso tale da far avvi-

cinare le spire tra loro, ovvero "da estensione", cioè da assoggettare a carico agente in senso opposto.

Le differenze costruttive riguardano l'inclinazione dell'elica e, principalmente, la forma delle spire di estremità, che dev'essere tale da realizzare le più favorevoli condizioni di vincolo, cioè di collegamento con gli organi adiacenti.

Si richiede in particolare che il carico trasmesso per contatto tra le spire di estremità e gli organi adiacenti presenti retta d'azione il più possibile vicina all'asse della molla, così da assicurare con buona approssimazione la vantaggiosa uniformità di sollecitazioni e, nel caso di molle da compressione, le migliori condizioni di stabilità.

Nelle molle da compressione si ricorre ordinariamente al sistema di accostare le spire di estremità a quelle contigue, riducendone l'inclinazione fino al valore minimo corrispondente alla condizione di contatto tra le spire (molle a spire terminali "chiuse"). Poiché di norma la molla viene montata tra due superfici piane parallele, le spire di estremità vengono spianate normalmente all'asse (per molatura nelle molle costruite a freddo, per fucinatura o laminazione ed eventuale successiva molatura in quelle costruite a caldo), così da estendere convenientemente le superfici di contatto, riducendone ad un tempo, per quanto possibile, l'inevitabile dissimetria rispetto all'asse.

La spianatura è eseguita di norma in modo che la dimensione assiale d_e della barra avvolta (che nel caso di sezione circolare corrisponde al diametro parallelo all'asse) si riduca all'estremità a circa $1/4$ del suo valore; essa viene ad estendersi a circa $3/4$ della spira (vedi fig. 14 a)).

Le spire di estremità ad inclinazione ridotta non concorrono al pari delle altre alla deformazione globale della molla. Di ciò si tiene conto usualmente, nel calcolo della freccia e della rigidezza, considerando il numero totale delle spire n_t come somma di un numero n di spire "attive", tutte uguali e dotate di ugual deformabilità, e di un certo numero n_i di spire "inerti", cioè indeformabili, ponendo così

$$n_t = n + n_i \quad (29)$$

Quando le spire di estremità sono configurate come si è detto innanzi, si suole assumere

$$n_1 = \begin{cases} 2 & \text{per molle lavorate a freddo.} \\ 1.5 & \text{per molle lavorate a caldo.} \end{cases}$$

tenendo conto che di norma nel primo tipo di molle le due spire terminali sono realizzate in modo che le loro estremità risultano a contatto (in certi casi anche con leggera pressione) con le rispettive spire (contigue) (fig. 14 a)), il che non accade nelle molle dell'altro tipo (fig. 14 b)).

Nelle formule della freccia e della rigidità (in particolare nelle (28), valide per sezione circolare) non va dunque introdotto il numero totale di spire della molla, ma quello delle spire attive, dedotto dalla (29).

Nel calcolo della lunghezza minima L_b della molla, corrispondente alla condizione di massima compressione, con spire a contatto tra loro (molla "a blocco") va tenuto conto delle spianature di estremità; negli stessi casi considerati innanzi si assume

$$L_b = (n + n_e) d_a \quad (30)$$

dove d_a è la dimensione assiale della sezione della barra e per n_e si pone

$$n_e = \begin{cases} 1.5 + 2 & \text{per molle lavorate a freddo (spianate con molatura)} \\ 1 + 1.1 & \text{per molle lavorate a caldo (spianate con molatura)} \\ 1 + 1.2 & \text{per molle lavorate a caldo (spianate per laminazione)} \end{cases}$$

Se δ è la distanza, misurata nella direzione dell'asse della molla, fra due spire attive consecutive a molla scarica (figura 14 a)), l'inclinazione delle spire attive è

$$\operatorname{tg} \beta_0 = \frac{d_a + \delta}{\pi D} \quad (31)$$

La freccia massima ottenibile e' evidentemente

$$f_{max} = n \delta \quad (32)$$

e la lunghezza della molla scarica risulta, per la (30),

$$L_0 = L_b + f_{max} = \left[n \left(1 + \frac{\delta}{d_a} \right) + n_e \right] d_a \quad (33)$$

Introducendo i rapporti

$$\gamma_s = \frac{d_a}{d_r}, \quad \gamma_a = \frac{\delta}{d_a}, \quad \gamma_r = \frac{D}{d_r},$$

che hanno il significato di fattori di forma della molla; le (31), (32) e (33) si possono scrivere rispettivamente

$$\operatorname{tg} \beta_0 = \frac{1 + \gamma_a}{\pi \gamma_r} \gamma_s.$$

$$f_{max} = n \gamma_a d_a.$$

$$L_0 = [n(1 + \gamma_a) + n_e] d_a.$$

Nel caso di molla fatta con tondino circolare di diametro d si ha

$$d_a = d_r = d$$

e quindi

$$\gamma_s = 1, \quad \gamma_a = \frac{\delta}{d}, \quad \gamma_r = \frac{D}{d}$$

Nello stesso caso valgono inoltre le (28) (pag.43) dalla prima delle quali si puo' dedurre il carico che da' luogo alla frec

cia massima, esprimibile in una delle forme seguenti

$$P_{max} = \frac{G}{8\lambda_1} \frac{d^4}{D^3} \delta = \frac{G}{8\lambda_1} \frac{Y_a}{Y_r^3} d^2$$

mentre dalla terza, corrispondentemente, si ricava la massima tensione tangenziale raggiungibile nella molla

$$\tau_{0max} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{Gd}{\pi D^2} \delta = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{G}{\pi} \frac{Y_a}{Y_r^2}$$

che dev'essere tenuta, in ogni caso, convenientemente al di sotto del limite di elasticita' del materiale.

Nel proporzionamento della molla la scelta dei coefficienti Y_s , Y_a , Y_r e quella del numero di spire va fatta in base alla freccia di cui s'intende disporre, alla reazione elastica che si richiede nonche' alle esigenze d'ingombro.

Per i motivi precedentemente illustrati, tali parametri sono da assumere in modo che β_0 risulti possibilmente non maggiore di 8° e il rapporto di avvolgimento Y_r non inferiore a 4. Il valore di δ , e quindi di Y_a , e' pertanto da tenere a sua volta il meno alto possibile; quale valore minimo di tale rapporto si consiglia ordinariamente

$$Y_{a\min} = \begin{cases} 0.1 & \text{per molle lavorate a freddo.} \\ 0.15 & \text{per molle lavorate a caldo.} \end{cases}$$

Quanto al numero delle spire, esso, una volta fissati i parametri menzionati, trova un limite nel pericolo di instabilita' della molla. Di norma, per $n \geq 15$ e' comunque opportuno montare la molla con apposita guida esterna o interna, per assicurarla contro l'instabilita'.

Per migliorare la condizione di assialita' del carico e' consigliabile far si' che le estremita' delle due spire terminali della molla risultino in posizioni diametralmente oppo-

ste rispetto all'asse, il che equivale ad assumere il numero totale di spire multiplo intero di 1/2, cioè a porre

$$n_t = k + 1/2$$

con k intero.

In pratica si utilizzano per le molle da compressione anche soluzioni costruttive terminali diverse da quella descritta innanzi: a spire terminali "aperte" (cioè non accostate) spianate o non, a estremità "chiusa" e non spianate (vedi figure 15 a), b), c)), ecc.

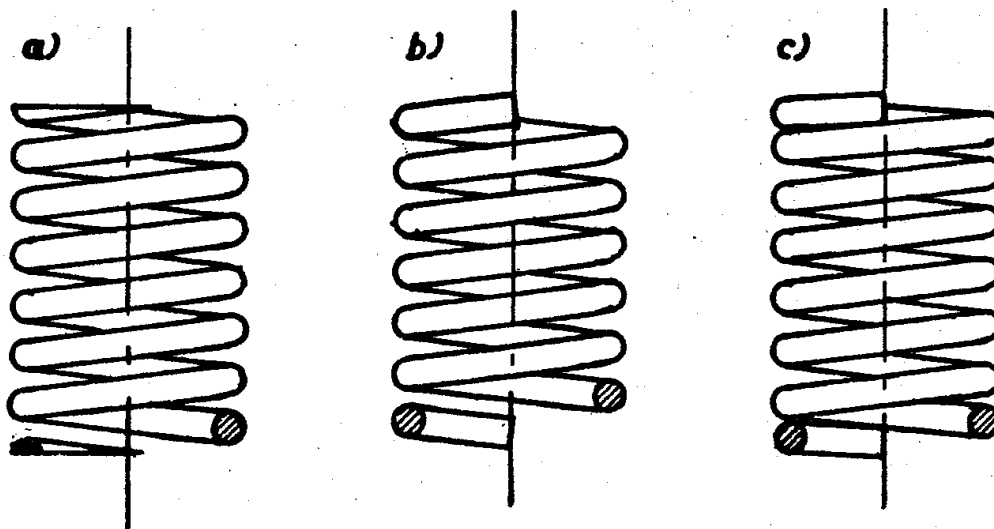
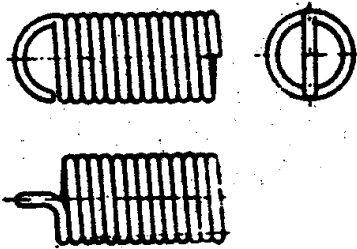


fig.15

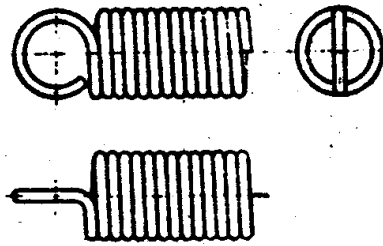
In taluni casi le spire di estremità, non spianate, vengono alloggiate in apposite piastrine, dotate di impronte elicoidali (fig.14 c)), a loro volta montate sui piani di appoggio in modo da risultare girevoli intorno all'asse della molla: si tratta però di soluzioni speciali, che se consentono migliori condizioni di trasmissione del carico, presentano gli svantaggi del maggior costo e del notevole ingombro.

Le molle elicoidali da estensione presentano invece le estremità configurate ad occhiello o a gancio di varia forma oppure dotate di organi di collegamento in vario modo connessi alle spire terminali, come esemplificato in fig.16.

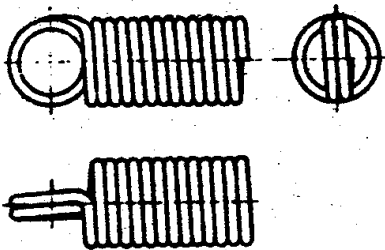
Essendo destinate ad allungarsi sotto carico, queste molle presentano la caratteristica di avere, allo stato indefor-



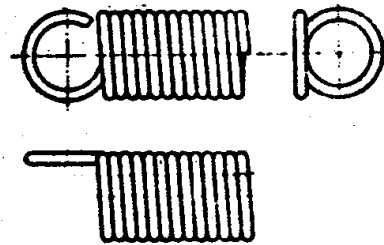
Mezzo gancio tedesco



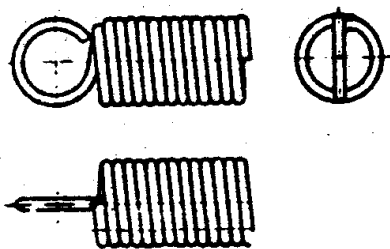
Gancio completo tedesco



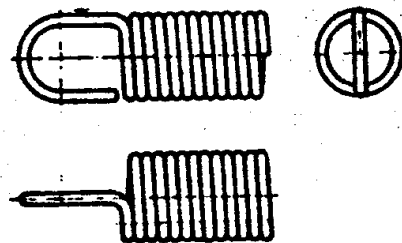
Gancio doppio tedesco



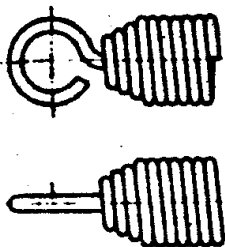
Gancio completo tedesco laterale



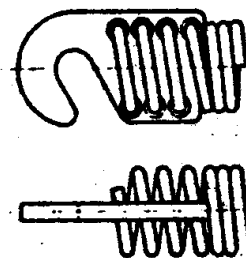
Gancio inglese



Gancio a rampino



Gancio a rampino bordato



Gancio piatto avvitato

fig. 16

mato, le spire a contatto fra loro. Di norma esse sono costruite in modo che le spire risultino, in assenza di carico, premute l'una contro l'altra. Cio' si ottiene operando sul filo, simultaneamente all'avvolgimento ad elica, una deformazione torsionale di verso opposto a quello di avvolgimento.

L'annullamento dell'aliquota elastica di tale deformazione, che implicherebbe un accorciamento della molla, non puo' verificarsi, essendo le spire a contatto fra loro; la corrispondente energia elastica rimane dunque imprigionata nella molla e la sua tendenza a liberarsi si manifesta con una pressione di contatto tra le spire. In tal modo la molla risulta precaricata ed e' pertanto se

de, in assenza di carico esterno, dello stato tensionale corrispondente al precarico, rappresentato dalla risultante P_p della pressione di contatto tra le spire. Si comprende facilmente che un simile effetto e' ottenibile correttamente solo utilizzando filo a sezione circolare.

Se si sottopone a carico estensivo crescente P una

molla precaricata, fino a quando P non raggiunge il valore del precarico P_p , essa rimane indeformata e lo stato tensionale si mantiene inalterato, mentre la pressione tra le spire si riduce a misura che aumenta P , e si annulla per $P = P_p$. Soltanto quando il carico supera tale valore compare la freccia e le tensio

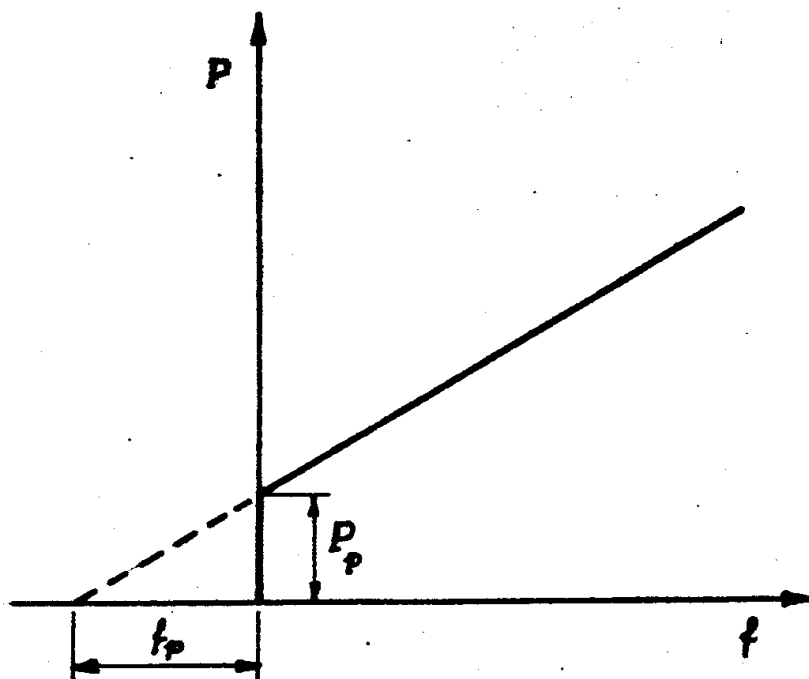


fig. 17

ni aumentano. La curva caratteristica e' del tipo indicato in fig. 17.

Con tale accorgimento costruttivo si consegue il vantaggio di ottenere, con una data freccia, una reazione elastica aumentata di P_p rispetto a quella che si avrebbe in assenza di pretorsione.

Il precarico P_p si puo' considerare corrispondente ad una freccia fittizia f_p calcolabile con la prima delle (28) (pag. 43), mentre la terza di tali equazioni fornisce la tensione massima τ_{op} del relativo stato tensionale.

Sistemi di molle

Le molle vengono spesso utilizzate, anziche' singolarmente, componendole in complessi multipli atti a costituire sistemi elastici, le cui caratteristiche dipendono da quelle delle singole molle componenti e dalla loro disposizione.

Tali sistemi elastici si ottengono disponendo piu' molle secondo combinazioni piu' o meno complesse delle due disposizioni fondamentali "in serie" e "in parallelo".

Nella disposizione in serie ciascuna delle molle sopporta tutto il carico che e' applicato al sistema, e la freccia che si produce in quest'ultimo e' somma di quelle delle singole molle.

Se c_i ed f_i sono rispettivamente la rigidezza e la freccia della i -esima di un sistema di k molle in serie soggetto ad un carico P e c ed f sono le stesse grandezze relative al sistema considerato come molla unica, si ha dunque

$$f = \sum_k f_i = P \sum_k \frac{1}{c_i}$$

$$c = \frac{P}{f} = \frac{1}{\sum_k \frac{1}{c_i}}$$

Da queste relazioni deriva anche

$$f_i = \frac{c}{c_i} f$$

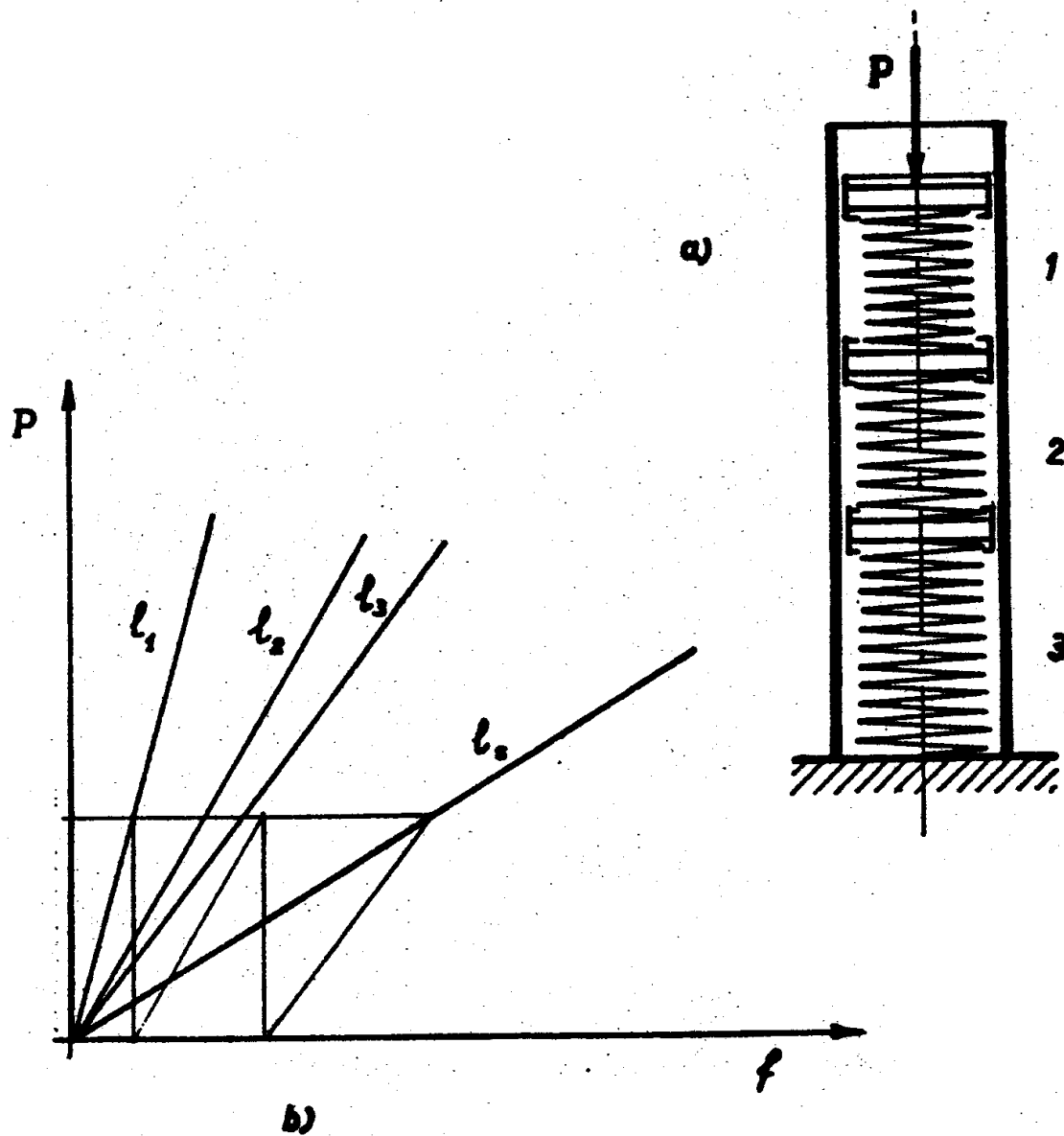


fig. 18

In fig. 18 a) e' schematizzato un sistema di tre molle in serie. La fig. 18 b) mostra come, nell'ipotesi che tutte le molle abbiano caratteristica lineare, sia possibile costruire immediatamente, in base alle formule precedenti, la curva caratteristica l_s del sistema, ricavandola da quelle indicate con

l_1, l_2, l_3 delle singole molle, immaginate dotate di rigidità diverse.

Si parla di disposizione in parallelo quando il carico P gravante sul sistema si ripartisce fra le singole molle e queste assumono tutte una stessa freccia che è quella del sistema; le aliquote di carico assorbite dalle molle sono pertanto proporzionali alle rispettive rigidità, avendosi

$$P = \sum_k P_i = f \sum_k c_i$$

$$c = \sum_k c_i$$

da cui si trae anche

$$P_i = \frac{c_i}{c} P$$

In fig. 19 a) è rappresentato uno schema di tre molle in parallelo ed in fig. 19 b) è mostrata la costruzione della curva caratteristica l_p del sistema dalle curve l_1, l_2, l_3 delle tre molle, sempre nell'ipotesi di rigidità costanti e diverse tra loro.

Va precisato che il fatto che gli schemi adottati nelle figure 18 e 19 richiama la forma delle molle elicoidali di torsione non esclude che essi possano riferirsi a molle diverse e non necessariamente tutte dello stesso tipo, aventi disposizioni, vincoli e carichi equivalenti a quelli indicati.

A chiarimento può dirsi, ad esempio, che il sistema rappresentato in fig. 20, composto da sei molle a balestra, appare costituito da tre molle in parallelo, ciascuna delle quali è a sua volta composta da due molle in serie.

È facile comprendere come, componendo opportunamente le due disposizioni ora illustrate, si possono ottenere sistemi elastici di prefissata rigidità. Con opportuni accorgimenti è possibile comporre sistemi a rigidità variabile: basta far sì che, al variare del carico, l'aumento della deformazione com

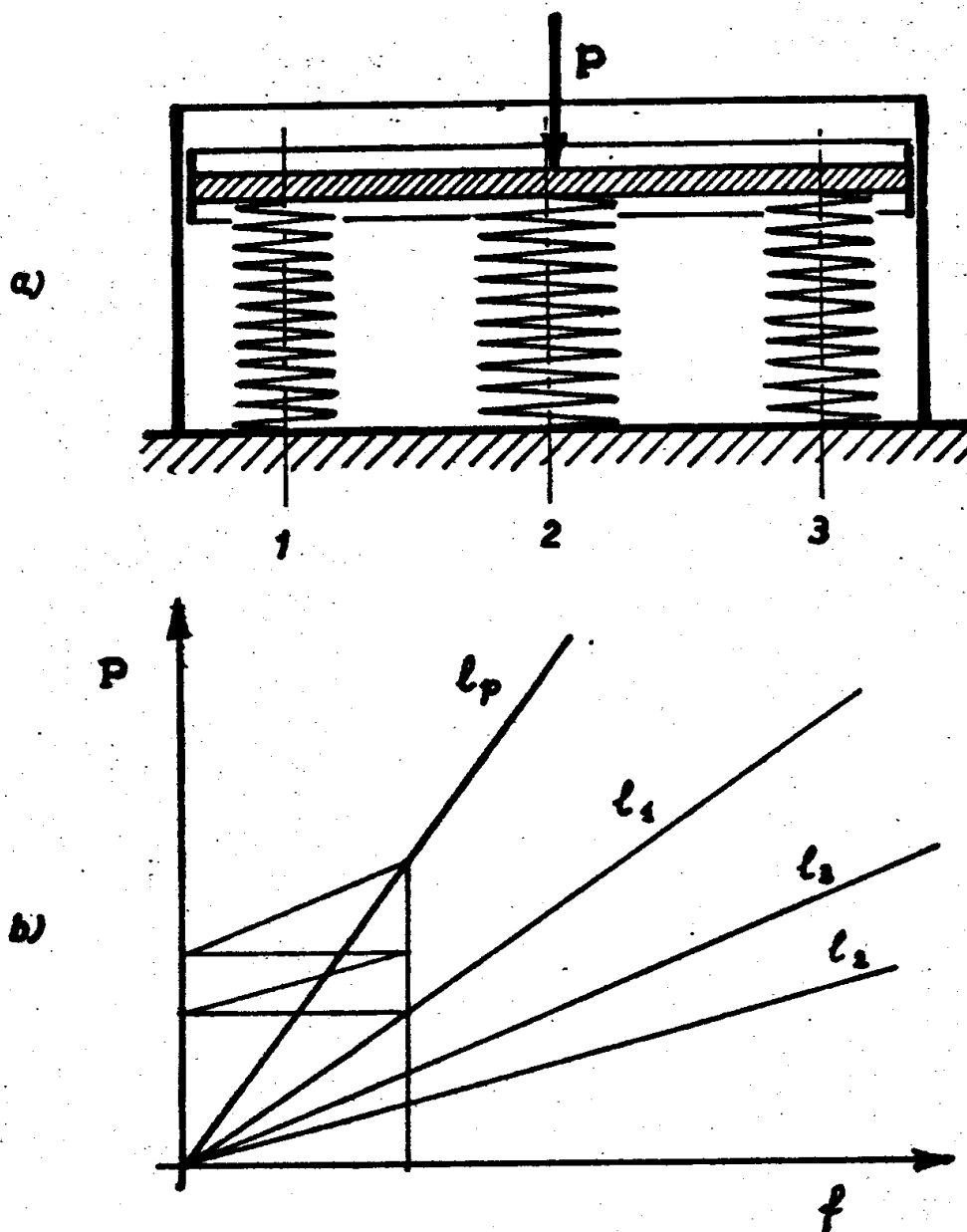


fig. 19

porti l'eliminazione graduale di una parte dei vincoli interni o esterni del sistema, ovvero un graduale intervento di nuovi vincoli, e conseguentemente una variazione del numero degli elementi elastici che partecipano alla deformazione del sistema stesso.

Un semplice esempio e' costituito da una molla elicoidale cilindrica da compressione a passo variabile: in essa sotto l'azione di un carico crescente verranno per prime a contatto

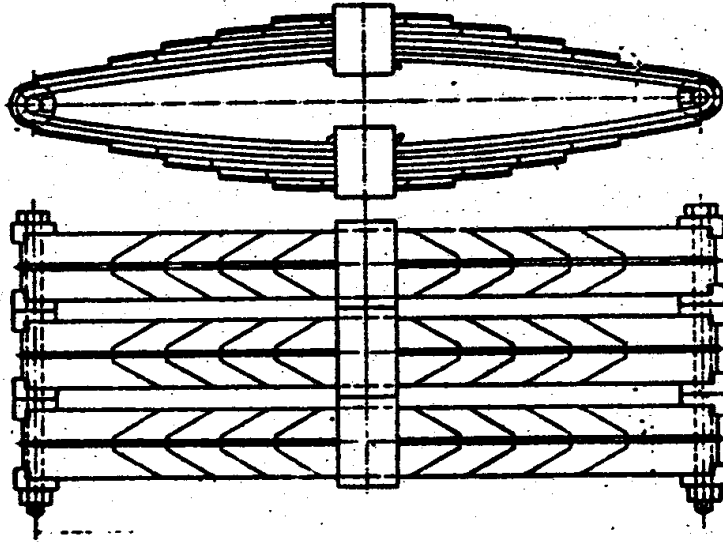


fig. 20

fra loro le spire di inclinazione minima e successivamente quelle di inclinazione via via maggiore.

Con la graduale esclusione di un numero crescente di spire, alla deformazione della molla (che puo' riguardarsi come un sistema elastico di elementi in serie, ciascuno costituito da una spira) partecipa un numero di spire sempre minore e la rigidezza risulta gradualmente crescente.

La fig. 21 a) mostra una particolare disposizione in parallelo di molle elicoidali che trova frequenti applicazioni (ad esempio per molle di richiamo delle valvole di motori a combustione interna) e presenta il vantaggio di una razionale utilizzazione dello spazio: le molle sono disposte una nell'altra coassialmente; i versi delle eliche sono alternati allo scopo di ridurre al minimo il disassamento della reazione elastica

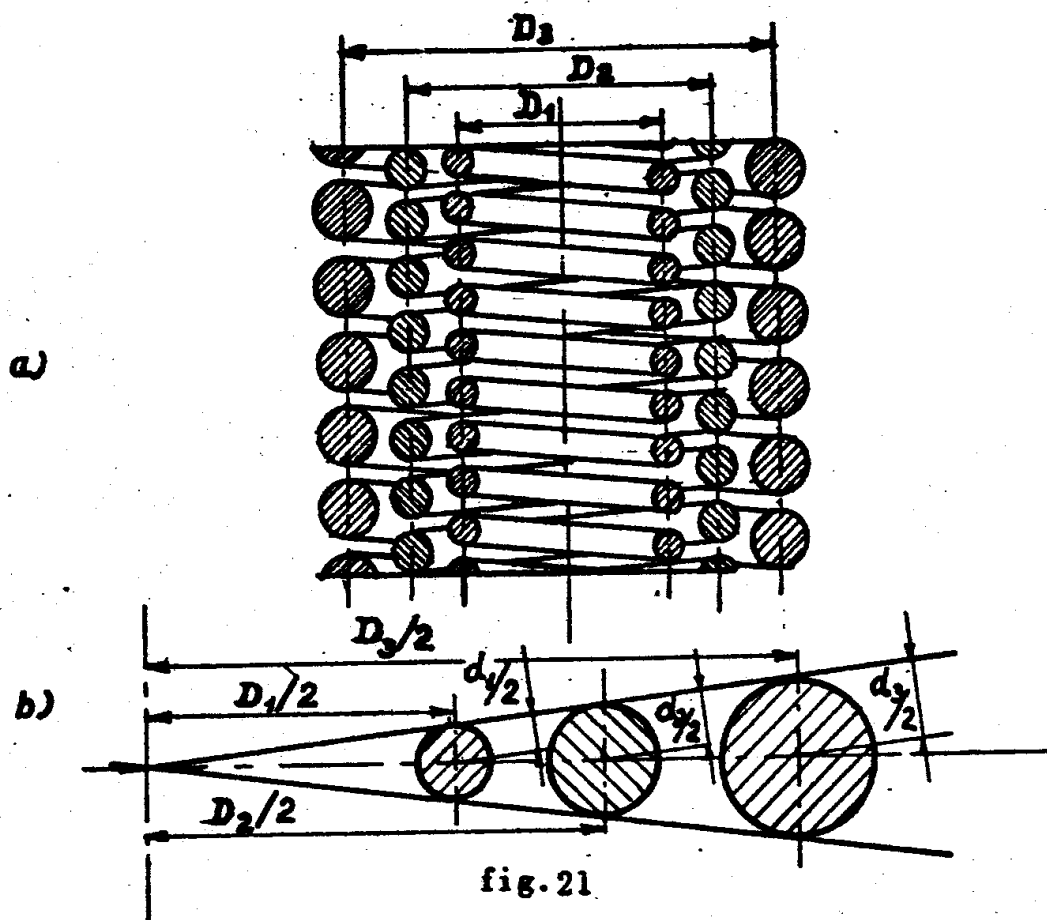


fig. 21

del sistema.

Se le molle hanno tutte la stessa lunghezza libera, esse assumono, sotto carico, tutte la stessa freccia.

La migliore utilizzazione del materiale si consegue assegnando i diametri dei tondini in base al criterio dell'uniforme resistenza, cioè in modo che in tutte le molle si abbia una stessa tensione massima. Tale condizione per la 3^a delle (28) (pag. 43), se si assumono per tutte le molle gli stessi coefficienti λ_1 e λ_2 , e' espressa dalla relazione

$$\frac{d_1}{n_1 D_1^2} = \frac{d_2}{n_2 D_2^2} = \dots = \frac{d_k}{n_k D_k^2}$$

La migliore utilizzazione dello spazio si ottiene facendo sì che anche la lunghezza minima, corrispondente alla condizione di contatto fra le spire, sia, al pari di quella libera,

uguale per tutte le molle, il che implica

$$n_1 d_1 = n_2 d_2 = \dots = n_k d_k .$$

Affinche' le due condizioni citate possano entrambe sussistere, deve aversi

$$\frac{d_1}{D_1} = \frac{d_2}{D_2} = \dots = \frac{d_k}{D_k} \quad (33)$$

cioe' i diametri dei tondini delle varie molle si debbono assumere proporzionali ai rispettivi diametri di avvolgimento (figura 21 b)) il che convalida la posizione fatta per λ_1 e λ_2 .

Dalle stesse condizioni deriva altresì, come agevolmente puo' dedursi dalle (28);

$$\frac{c_1}{d_1^2} = \frac{c_2}{d_2^2} = \dots = \frac{c_k}{d_k^2} ,$$

$$\frac{P_1}{d_1^2} = \frac{P_2}{d_2^2} = \dots = \frac{P_k}{d_k^2} ,$$

e cioe' tanto le rigidezze quanto le reazioni elastiche delle singole molle risultano proporzionali ai quadrati dei diametri dei rispettivi tondini (e anche, in virtu' della (33), ai quadrati dei rispettivi diametri di avvolgimento).

Dall'ultima relazione si trae infine che la reazione elastica della molla *i-esima* e' data da

$$P_i = \frac{d_i^2}{\sum_k d_k^2} P ,$$

in quanto la somma delle reazioni delle molle del sistema equivale al carico P .

(Analoga relazione vale, naturalmente, per le rigidzze.)

Oscillazioni libere nelle molle

Consideriamo una molla elicoidale sospesa verticalmente e soggetta all'azione del peso P , di una massa applicata all'estremità inferiore, secondo lo schema di fig. 22 a).

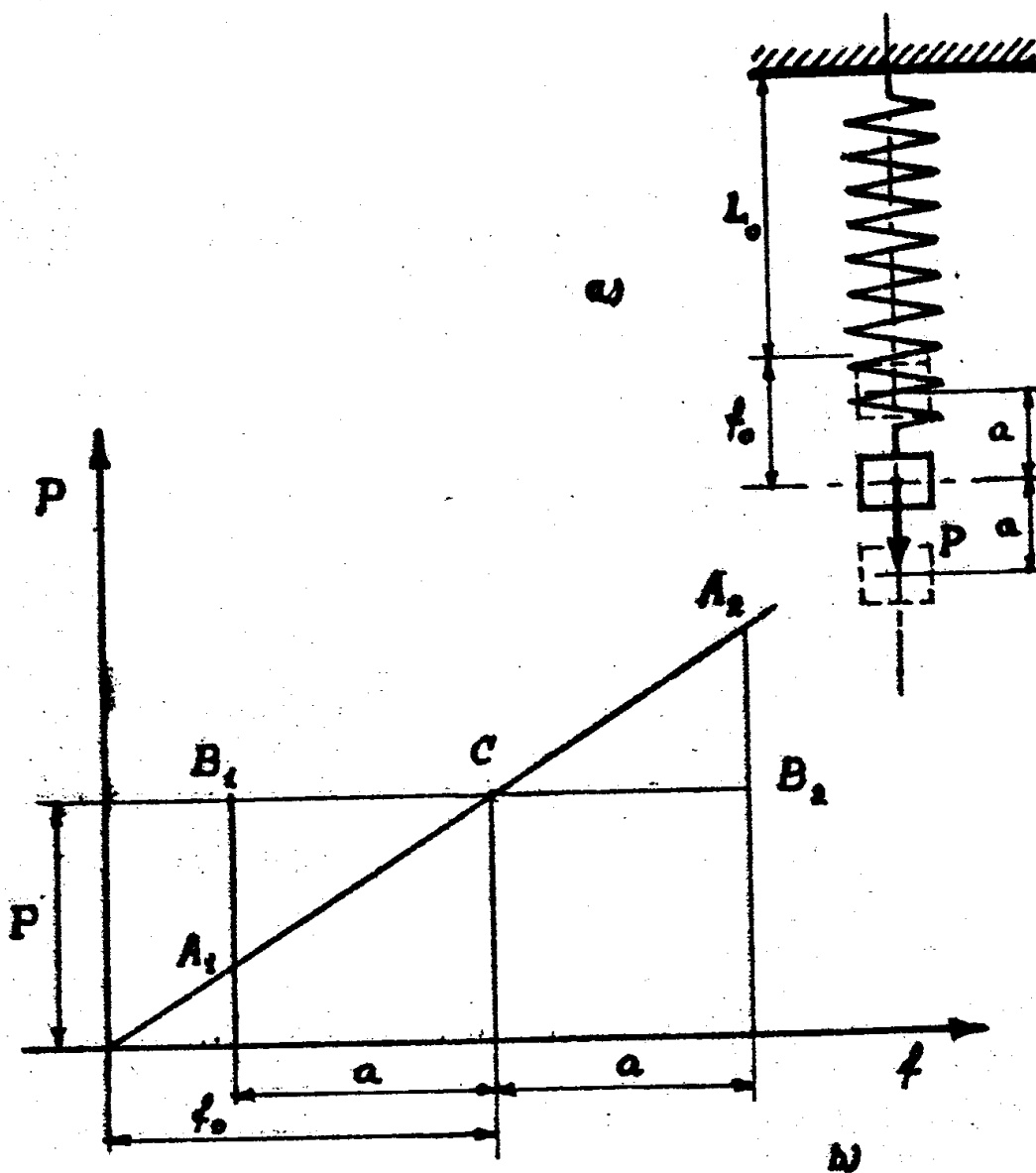


fig. 22

Siano L_0 la lunghezza libera della molla ed f_0 la freccia che essa assume sotto l'azione statica di P .

Supponiamo che la configurazione di equilibrio della molla venga istantaneamente alterata da una causa esterna: si può pensare ad esempio all'applicazione temporanea di una forza verticale equiversa o controversa a P che, dopo aver fatto variare la freccia di una certa quantità a , si annulli istantaneamente.

Venendo a mancare la condizione di equilibrio tra la reazione elastica della molla ed il peso della massa sospesa, questa si porrà in moto.

Detta f la freccia assunta dalla molla nell'istante generico e c la rigidità (supposta costante), se si prescinde dalle cause dissipative e si trascura la massa della molla rispetto a quella sospesa, l'equazione del moto di quest'ultima è

$$\frac{P}{g} \frac{d^2 f}{dt^2} = P - cf$$

che, dividendo per P/g , si può scrivere

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{gc}{P} f = g \quad (34)$$

Un integrale particolare di quest'equazione è evidentemente

$$f_0 = \frac{P}{c}$$

che rappresenta la freccia corrispondente all'azione statica di P . L'integrale generale è dunque

$$f = f_0 + f_g$$

essendosi indicato con f_g l'integrale dell'omogenea associata alla (34),

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{gc}{P} f = 0 ,$$

che notoriamente e' l'equazione differenziale del moto armonico di pulsazione

$$\omega = \sqrt{\frac{gc}{P}}$$

ed ammette l'integrale

$$f_g = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t .$$

Essendo, per le premesse fatte, $f_g = a$ nell'istante in cui il moto ha inizio, la determinazione delle costanti conduce al risultato

$$C_1 = 0 , \quad C_2 = a$$

e l'integrale della (34) risulta indefinita.

$$f = f_0 + a \cos \omega t ,$$

che esprime un moto oscillatorio intorno alla posizione di equilibrio individuata dalla freccia f_0 , di ampiezza pari alla deviazione a impressa alla massa all'istante iniziale.

Il periodo di oscillazione risulta

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{P}{gc}} = 2\pi \sqrt{\frac{f_0}{g}}$$

Riportando sul diagramma di deformabilita' gli estremi $[f_0 \pm a]$ dell'intervallo di oscillazione (fig. 22 b)), appare chiaro che nella fase di allungamento, mentre la freccia au-

menta da $[f_0 - a]$ ad f_0 il peso P prevale sulla reazione elastica della molla, per cui l'accelerazione della massa e' diretta verso il basso ed il lavoro compiuto da P supera quello assorbito dalla molla in forma di energia elastica della quantita' rappresentata dal triangolo A_1B_1C .

Questa eccedenza di lavoro si accumula nella massa come energia cinetica che, mentre la freccia passa da f_0 ad $[f_0 + a]$, si trasforma in energia elastica della molla per la quantita' rappresentata dall'area del triangolo CA_2B_2 (equivalente ad A_1B_1C), sovrapponendosi all'energia elastica derivante dallo ulteriore lavoro compiuto da P : in questa fase, prevalendo la reazione elastica su P , l'accelerazione della massa e' diretta verso l'alto (cioe' in opposizione al moto) e la sua velocita' pertanto decresce fino ad annullarsi.

Durante la successiva fase di accorciamento si ha, corrispondentemente, prima ritrasformazione della stessa quantita' di energia elastica della molla in energia cinetica, con moto accelerato verso l'alto, e poi esaurimento di tale energia cinetica in lavoro di sollevamento della massa, con moto decelerato fino all'arresto al punto morto superiore.

Va precisato che i risultati ottenuti sono validi, sotto gli stessi presupposti della elasticita' lineare, della trascurabilita' della massa della molla e dell'assenza di cause dissipative, anche per molle di tipo diverso da quella elicoidale cui, per comodita' di esposizione, si e' fatto riferimento.

La validita' di tali risultati trova naturalmente i suoi limiti nelle stesse ipotesi premesse, la cui rimozione conduce a procedimenti meno semplici, che peraltro trovano spazio in apposita disciplina.