

## COLLEGAMENTI FILETTATI

-----

### NOZIONI CINEMATICHE - I COLLEGAMENTI FILETTATI IN MECCANICA APPLICATA ALLE MACCHINE

Diconsi "membri" di una macchina le varie parti, in moto relativo l'una rispetto all'altra, di cui essa è costituita. I membri mobili sono vincolati fra loro e col telaio e, in conseguenza di tali vincoli, risultano limitate le possibilità di moto di ciascun membro relativo agli altri a cui è collegato, e al telaio, ossia il numero dei gradi di libertà del membro generico in esame e di tutta la macchina.

Si definisce "coppia" il sistema di due membri contigui tra loro collegati o, come si dice, "accoppiati", e la coppia si dice "cinematica" se il numero dei gradi di libertà di ogni membro della coppia è uguale a uno. Costituiscono ad esempio coppia cinematica sia il sistema albero-cuscinetto, sia quello biella-manovella. Altro esempio di coppia cinematica è fornito da uno stelo prismatico che scorre entro una guaina (figura 1). Esempio invece di coppia non cinematica è quello (figura 2) di uno stelo cilindrico scorrevole entro una guaina cilindrica.

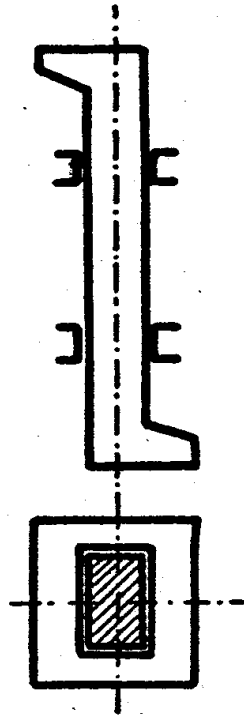


figura 1

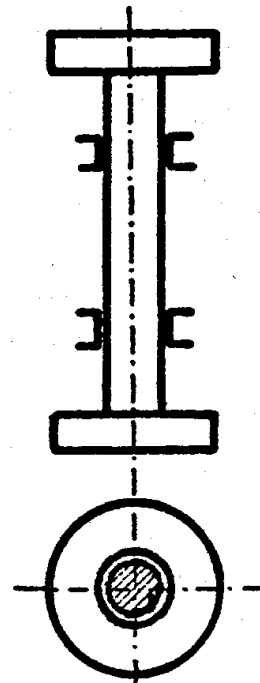


figura 2

ca in quanto, se si tiene fissa la guaina il numero dei gradi di libertà dello stelo non è uno, ma due (analogamente se si tiene fisso lo stelo).

Gli elementi essenziali di una coppia cinematica (e, più in generale, di una coppia), sono le superficie dei membri accoppiati che sono a contatto durante il moto, perchè è appunto da queste superficie che dipende il moto relativo di uno dei membri accoppiati rispetto all'altro: a dette superficie si dà pertanto il nome di "elementi cinematici" della coppia o "superficie coniugate".

Per quanto attiene i membri essi, se solidi, possono distinguersi in "rigidi" e "deformabili". Tale classificazione è puramente convenzionale e serve a distinguere

quei membri, le cui deformazioni sono così piccole, nelle condizioni di normale impiego, da potere essere trascurate, per quanto si riferisce alla determinazione della posizione dei vari punti del membro stesso, da quei corpi in cui la deformazione è uno degli elementi essenziali del fenomeno in istudio.

Orbene si hanno "coppie rigide", se sono rigidi nel senso testè indicato entrambi i membri collegati. Inoltre si hanno coppie costituite da un membro mobile e da uno fisso (es. albero-cuscinetto), oppure da due membri entrambi in moto (ad es. biella-manovella). Allorchè poi il moto relativo dei due membri accoppiati ha un solo grado di libertà, e se questa unicità del moto relativo viene assicurata dal solo accoppiamento esistente tra i due membri, indipendentemente da altri legami, e da qualsiasi altra circostanza, la coppia dicesi "indipendente": es. stelo prismatico entro guaina. Può invece accadere che l'accoppiamento dei due membri, considerati isolatamente dagli altri elementi costituenti la macchina, sia tale da lasciare più di un grado di libertà relativa: es. stelo cilindrico entro guaina, stantuffo entro cilindro. Il numero dei gradi di libertà di tale moto relativo è però ridotto ad uno nel funzionamento effettivo della macchina, in conseguenza degli altri vincoli imposti a questa; così lo stelo può solo traslare nella direzione dell'asse comune quando la rotazione intorno a tale asse è impedita dal collegamento dello stelo stesso ad una slitta obbligata a scorrere esclusivamente nella direzione dell'asse; lo stantuffo non può ruotare entro il cilindro a motivo del suo accoppiamento colla biella. In questo caso la coppia cinematica si dice "dipendente".

Le coppie cinematiche si classificano anche a seconda della natura del contatto tra le superficie coniugate. Nelle coppie rigide si possono distinguere vari tipi di contatto a seconda dei loro caratteri geometrici. Così si

ha tra gli altri il contatto "superficiale" o di "combaciamento" quando esso è esteso a tutta una superficie. In tal caso le superficie coniugate devono essere identiche: es. contatto tra perno e cuscinetto nei normali cuscinetti a strisciamento.

Stante tutto quanto premesso si definiscono coppie rigide elementari o "inferiori" le coppie cinematiche rigide, indipendenti, che presentano contatti di combaciamento: le superficie coniugate di esse, che sono quindi identiche, devono presentare la proprietà di potere scorrere su se stesse senza deformarsi e inoltre devono lasciare ai membri accoppiati un solo grado di libertà'. Fra tali superficie si classificano quelle elicoidali. Nasce dunque la coppia elicoidale (moto relativo elicoidale). A tale categoria appartiene l'accoppiamento vite-dado e, in generale, vite-madrevite.

La coppia elicoidale, come altre coppie (non elicoidali) sulle quali s'è taciuto, realizza un moto rigido elementare, quello elicoidale appunto. Essa gode della proprietà di essere reciproca, ossia, se nella coppia si fissa uno dei membri, ad es. A, il moto consentito all'altro membro B è identico a quello permesso ad A quando si fissa B.

### REGIME ASSOLUTO - RENDIMENTO NEL REGIME ASSOLUTO

Si distinguono le forze applicate agli organi dall'esterno dalle azioni e reazioni mutue degli organi stessi. Le forze esterne si distinguono in motrici e resistenti a seconda che il loro senso è tale da favorire o ostacolare il moto degli organi ai quali sono applicate.

Nel primo caso esse compiono lavoro positivo, nel secondo, invece, lavoro negativo, assorbendo una parte del lavoro svolto dalle altre forze.

Sono forze motrici: l'azione del vapore sugli stantuffi delle macchine alternative oppure sulle palette delle turbine; sono forze resistenti: il peso che un organo deve sollevare, le forze che bisogna vincere per tornire, fresare, ecc.

Le forze resistenti o, semplicemente, le "resistenze", si dicono utili quando il lavoro che esse assorbono è il lavoro utile per compiere il quale la macchina è costruita. A queste forze si aggiungono sempre, nelle macchine, le resistenze passive, il cui lavoro viene dissipato inutilmente in quanto si converte generalmente in calore non utilizzabile. Sono tali gli attriti, azioni mutue che si manifestano tra le superficie a contatto degli organi opponendosi al loro movimento relativo di strisciamento o di rotolamento; le resistenze opposte dai fluidi (aria, acqua) al moto dei corpi (resistenza dei mezzi); la rigidità opposta dai cingoli all'avvolgimento sulle pulegge o allo svolgimento dalle stesse.

Gli organi delle macchine possono essere soggetti anche all'azione di coppie, che risultano motrici e resistenti (utili e passive) a seconda che compiono lavoro positivo o negativo.

Ciò premesso, qualunque sia il numero e la disposizione dei meccanismi che le costituiscono, l'equilibrio dinamico delle macchine (quando vengano introdotte, in base al principio d'Alembert, le forze d'inerzia) può studiarsi con i metodi, le equazioni, i procedimenti grafici dell'equilibrio statico.

Nel caso in cui il sistema di forze applicato sia costituito (o possa riportarsi) ad un'unica forza (o coppia) motrice  $P$  e ad un'unica resistenza (forza o coppia)  $u$

tile  $Q$  (espresse in valore assoluto), indicando con  $R$  le resistenze passive e chiamando  $\delta$ ,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ , i corrispondenti spostamenti virtuali (lineari o angolari che siano) relativi ad un tempo elementare  $dt$ , sarà, sempre in valore assoluto,

$$dL_m = P\delta$$

$$dL_u = Q\delta_1$$

$$dL_r = \Sigma R\delta_2$$

con evidente significato dei simboli  $L_m$ ,  $L_u$ ,  $L_r$  e dove la terza è scritta nella forma più generale possibile che tiene conto del fatto che le resistenze passive sono molteplici e di diverso tipo.

D'altra parte si ha, con riferimento al lavoro virtuale delle forze di inerzia

$$dL_i = - \int d_m \frac{dv}{dt} v dt = - \frac{1}{2} \int d_m d(v^2) = -dE$$

se con  $E$  s'indica la forza viva del sistema.

Risulta quindi

$$P\delta = Q\delta_1 + \Sigma R\delta_2 - dL_i = Q\delta_1 + \Sigma R\delta_2 + dE$$

che, per un tempo finito, può scriversi

$$L_m = L_u + L_r + (E_2 - E_1)$$

oppure

$$L_m - (L_u + L_r) = E_2 - E_1 \quad (1)$$

$(E_2 - E_1)$  è la corrispondente variazione totale di forza viva del sistema], la quale assicura che la differenza tra lavoro motore e lavoro resistente eguaglia la variazione di forza viva del sistema.

In pratica si osserva che il funzionamento a regime della macchina può presentare due caratteristiche distinte:

- la forza viva  $E$  rimane costante nel tempo, mancano dunque le forze d'inerzia (il moto è rettilineo uniforme) oppure esse non compiono lavoro (come avviene per le forze di massa distanti in corpi indeformabili che ruotano con moto angolare uniforme). Si è allora in condizioni di "regime assoluto" e l'equazione dei lavori manca dei termini in  $E$ . Essa può scriversi

$$P\delta = Q\delta_1 + \sum R\delta_2 \quad (2)$$

oppure

$$L_m = L_u + L_r \quad (3)$$

Poichè non è mai possibile annullare il lavoro  $L_r$ , perduto per vincere le resistenze passive, risulta dall'equazione (3) che il lavoro utile  $L_u$  deve essere sempre minore di quello motore  $L_m$ . Ciò significa che una macchina non restituisce mai integralmente, sotto forma di lavoro utile, tutto il lavoro motore assorbito. La quantità di lavoro perduto (che ritroviamo trasformato in calore inutilizzabile, anzi spesso dannoso, nella misura di  $427 \text{ kpm} = 1 \text{ kcal}$ ) è scelta come indice caratteristico del funzionamento più o meno economico delle macchine.

- la forza viva riacquista, ad intervalli uguali di tempo, sempre lo stesso valore; l'equazione (3) sussiste soltanto se applicata ad un intero periodo, e la macchina dicesi a "regime periodico". Il regime periodico è caratteristico delle macchine che abbiano organi dotati di moto alterno.

Quando non siano verificate nè le condizioni di regime assoluto, nè quelle di regime periodico, si dice semplicemente che il meccanismo e la macchina non sono a regime; ciò si verifica in pratica durante l'avviamento, all'arresto, ed in generale ogni volta che si passi da un dato regime ad un altro.

In un intervallo di tempo qualsiasi, quando si tratti di meccanismi o di macchine a regime assoluto, o in un intervallo multiplo del periodo nel caso di macchine a regime periodico, vale dunque la (3). Il rapporto  $L_u/L_m$  (sempre minore, per quanto prima detto, dell'unità) definisce il "rendimento" della macchina



$$\eta = \frac{L_u}{L_m} = \frac{L_m - L_r}{L_m} = 1 - \frac{L_r}{L_m} \quad (4)$$

La differenza  $1 - \eta = L_r/L_m$  caratterizza la "perdita di rendimento".

Soltanto idealmente può pensarsi ad un esercizio assolutamente privo di resistenze passive: chiamasi "forza motrice ideale" quel particolare valore  $P_i$  di  $P$  che sarebbe capace di vincere il lavoro utile richiesto nel caso che le resistenze passive mancassero. Deve evidentemente essere, nell'ipotesi del regime assoluto,

$$P_i \delta = Q \delta_1 \quad (5)$$

e quindi

$$= \frac{Q \delta_1}{P \delta} = \frac{P_i \delta}{P \delta} = \frac{P_i}{P}$$

Nelle macchine a regime assoluto il rendimento può calcolarsi cioè come rapporto tra la forza motrice ideale  $P_i$ , come sopra definita, e la forza motrice effettiva.

Si osservi che la (6) non è affatto valida per macchine a regime periodico poichè per queste il teorema dei lavori virtuali applicato all'esercizio ideale, non è espresso da un'equazione che abbia la forma della (5), bensì da altra che contiene l'elemento  $dE$ , e non consente di conseguenza, la trasformazione sopra adoperata.

MOTO RETROGRADO: RENDIMENTO NEL REGIME ASSOLUTO - ARRESTO SPONTANEO

Spesso nello studio dei meccanismi e delle macchine interessa considerare la possibilità del "moto inverso" nel quale la resistenza utile  $Q$ , conservando direzione e senso, diventa azione motrice. Tale possibilità si presenta anzi come un pericolo quando la  $Q$  sia ad esempio un carico da sollevare o la forza di pressione di un fluido a comprimere e la  $P$  - azione motrice del moto diretto - possa, per cause accidentali, annullarsi o diminuire di valore.

Nel moto inverso possono considerarsi tre casi:

1) Cessando nel moto diretto l'azione della forza motrice  $P$  s'inizia senz'altro il "moto retrogrado"; cosicchè (essendo certamente  $Q\delta_1 > \sum R\delta_2$  altrimenti il moto retrogrado non avrebbe luogo) occorre, per evitare il destarsi di accelerazioni nel moto retrogrado, applicare una forza frenante  $P_f$  capace di mantenere il regime assoluto.

La  $P_f$  dovrà avere evidentemente lo stesso verso della forza motrice  $P$  del moto diretto e pertanto (supponendo di riferirsi sempre nei simboli ai valori assoluti delle forze e degli spostamenti) l'equilibrio dinamico verrà allora espresso dalla relazione

$$Q\delta_1 = \sum R\delta_2 + P_f\delta$$

Si confronti quest'ultima equazione con la (2); per una data posizione del meccanismo gli spostamenti virtuali da considerare sono gli stessi in valore assoluto, tan

to per il moto diretto che per quello retrogrado, mentre le resistenze passive, dovute al complesso delle forze agenti, possono cambiare anche di valore.

2) Cessando di agire (nel moto diretto) la  $P$ , il meccanismo (o la macchina) si ferma ("arresto spontaneo"); cosicchè, essendo  $Q\delta_1 < \Sigma R'\delta_2$ , occorre, per determinare il moto retrogrado in condizioni di regime assoluto, applicare una forza  $P'$  diretta in senso opposto alla  $P$  e collaborante con la resistenza utile per vincere le resistenze passive.

In tali condizioni sarà

$$Q\delta_1 + P'\delta = \Sigma R'\delta_2$$

3) Ci si può trovare in "condizioni limiti di reciprocità". In tale ipotesi dovrà essere

$$Q\delta_1 = \Sigma R'\delta_2 \quad (7)$$

e cioè tutto il lavoro sviluppato dalla  $Q$  sarà integralmente assorbito istante per istante dalle resistenze passive  $R'$ .

Nel primo dei tre casi considerati il rendimento  $\eta_r$  relativo al moto retrogrado vale

$$\eta_r = \frac{P_f \delta}{Q\delta_1} = \frac{P_f \delta}{P_i \delta} = \frac{P_f}{P_i}$$

dalla quale si deduce, dovendo essere anche ora  $\eta_r < 1$

$$P_f < P_i$$

e, quindi

$$P_f < P_i < P$$

Nel secondo e terzo caso può scriversi, come si è visto,

$$Q\delta_1 \leq \Sigma R'\delta_2 \quad (8)$$

In corrispondenza, quando sia

$$\Sigma R'\delta_2 \leq \Sigma R\delta_2 \quad (9)$$

condizione questa spesso verificata, ma che, com'è facile controllare, non è sempre vera, il rendimento relativo al moto diretto risulta certamente  $\leq 0,5$ . Infatti per la (2) e la (9) può scriversi

$$P\delta \geq Q\delta_1 + \Sigma R'\delta_2 \quad (10)$$

la quale diventa, per la (8)

$$P\delta \geq 2Q\delta_1$$

da cui

$$\eta = \frac{Q\delta_1}{P\delta} \leq 0,5$$

Da tale conclusione si rileva come poco favore in contrino i meccanismi ad arresto spontaneo, salvo nel caso in cui, per ragioni di sicurezza, sia indispensabile e sccludere la reciprocità.

## IL PIANO INCLINATO

Si considererà qui di seguito l'unico membro del sistema mobile in regime assoluto e quindi valido l'equilibrio dinamico. Per la determinazione di forze motrici e resistenti potranno dunque utilizzarsi le condizioni di equilibrio fornite dalla statica, come se il membro mobile fosse in quiete.

Il problema è quello del sollevamento del grave di peso (forza resistente utile)  $Q$  dal livello  $h_0$  a quello  $h$  lungo il piano inclinato dell'angolo  $\alpha$  sull'orizzontale (figura 3). Esso viene risolto analiticamente equilibrando le forze nella direzione del moto. Con le notazioni della citata figura, ove  $\gamma$  indica l'angolo della  $P$  con la normale al piano e  $\beta$  è il suo complemento, osservato incidentalmente che la reazione del piano contro il grave deve passare per il punto in cui s'intersecano le linee d'azione del carico e della forza motrice, riferendosi al moto di ascesa si ha:

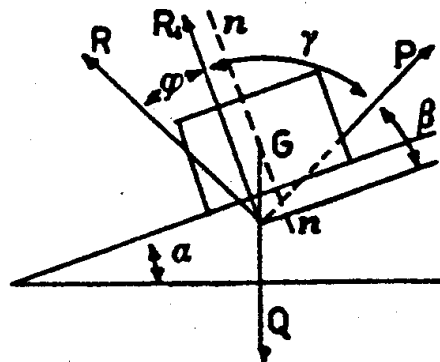


figura 3

a) nel caso ideale di assenza della resistenza d'attrito

$$P_0 = Q \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} = Q \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \quad (11)$$

b) nel moto effettivo, essendo la resistenza d'attrito proporzionale secondo il coefficiente  $f$ , alla somma algebrica  $Q \cos \alpha - P \sin \beta$  delle componenti di  $Q$  e  $P$  normali al piano inclinato,

$$P \cos \beta - Q \sin \alpha + f P \sin \beta - f Q \cos \alpha = 0$$

$$P(\cos \beta + f \sin \beta) = Q(\sin \alpha + f \cos \alpha) \quad ,$$

ossia

$$P = Q \frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{\cos\beta + f\sin\beta} = Q \frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{\sin\gamma + f\cos\gamma} \quad (12)$$

e, sostituendo  $\sin\varphi/\cos\varphi$  ad  $f$ , attraverso semplici trasformazioni

$$P = Q \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin(\gamma + \varphi)}$$

Dalle (11) e (12) risulta anche il rendimento,

$$\eta = \frac{P_o}{P} = \frac{\sin\alpha(\sin\gamma + f\cos\gamma)}{\sin\gamma(\sin\alpha + f\cos\alpha)}$$

che può scriversi, moltiplicando e dividendo il numeratore per  $\sin\gamma$  ed denominatore per  $\sin\alpha$ ,

$$\eta = \frac{1 + f\cot\gamma}{1 + f\cot\alpha} \quad (13)$$

non dipendente, com'è naturale, dal valore del carico.

Esaminiamo i vari casi possibili.

1) Per un dato  $\alpha$ , la (13) cresce al diminuire di  $\gamma$  raggiungendo il valore ideale limite uno quando  $\gamma = \alpha$ , quando cioè la  $P$ , diventata verticale, è direttamente contrapposta al carico  $Q$ . Invero in tal caso il piano in

clinato è sottratto alla sua funzione, e venendo a mancare ogni azione mutua fra il piano ed il grave non si ha alcuna dissipazione per lavoro d'attrito.

2) Per un assegnato  $\gamma$ , cioè per un'assegnata direzione della  $P$ , il rendimento diminuisce al diminuire dell'inclinazione  $\alpha$  del piano; per  $\alpha = 0$  risulta (com'era peraltro da attendersi)  $\eta = 0$ .

3) Se la forza motrice è orizzontale (fig. 4) risulta

$$\gamma = \frac{\pi}{2} + \alpha$$

Quindi

$$P_0 = Q \operatorname{tg} \alpha$$

$$P = Q \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$$

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} \quad (14) \quad (1)$$

4) Se la forza motrice è parallela al piano inclinato (fig. 5) risulta  $\gamma = \pi/2$ . Quindi (in tal caso è consuetudine parlare di "tiro" con riferimento alla forza mo-

---

(1) La (14) deriva anche direttamente dalla (13) come segue  
( $\gamma = \pi/2 + \alpha$ )

$$\eta = \frac{1 + \operatorname{tg} \varphi \cot \gamma}{1 + \operatorname{tg} \varphi \cot \alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \varphi \cot \alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \varphi} \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}$$



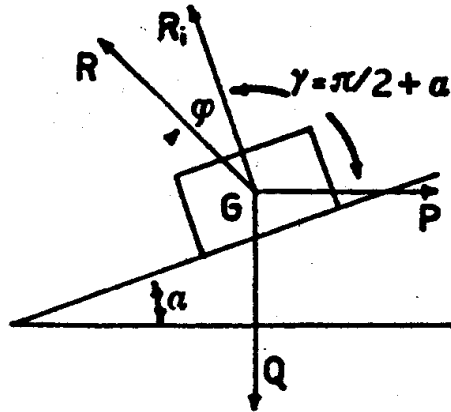


figura 4

trice ed indicarla con T)

$$T_0 = Q \sin \alpha$$

$$T = Q \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi} = Q \sin \alpha + f Q \cos \alpha$$

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \varphi} \rightarrow \text{VAI A IAC. 171}$$

come risulta anche direttamente dalla (13) per  $\cotg \gamma = 0$ .

5) Quando la P formi col piano inclinato l'angolo  $\varphi$  (fig. 6) per cui essa risulti, nel moto diretto, normale alla reazione R, il suo valore è evidentemente minimo

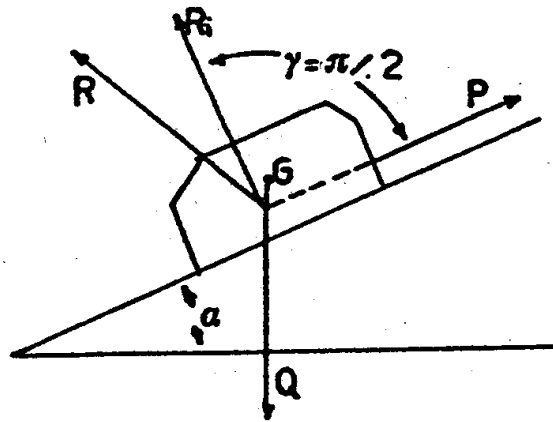


figura 5

(si osservi che il minimo di P non corrisponde affatto al massimo di  $\eta$ ). Infatti la (12) è minima quando è massimo il suo denominatore, ossia allorchè

$$\frac{d}{d\gamma} (\sin\gamma + f\cos\gamma) = 0$$

da cui

$$\cotg\gamma = \operatorname{tg}\varphi$$

cioè

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

che corrisponde proprio alla supposta condizione.

Si ha in tal caso

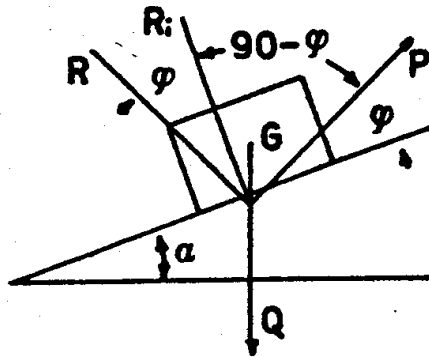


figura 6

$$\eta = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{tg} \varphi \cot \alpha}$$

Nel moto retrogrado la reazione del piano contro il grave è deviata - rispetto alla normale al piano inclinato - dell'angolo  $\varphi$  in verso opposto alla discesa (figura 7). Si presentano i seguenti casi:

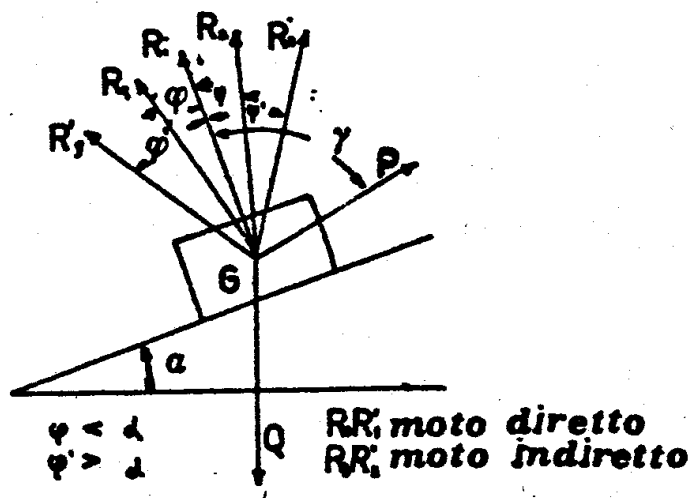


figura 7

1) E'  $\alpha > \varphi$  ed il moto di discesa può avvenire con velocità costante (e cioè in condizioni di regime assoluto) quando si applichi al grave una forza  $P'$  nella stessa direzione della  $P$  che agiva nel moto diretto. E' possibi-  
le risalire al valore di  $P'$  tenendo presente che essa, durante il moto di discesa, è coadiuvata nell'azione fre-  
nante dalla resistenza d'attrito. L'equilibrio lungo il pia-  
no si scrive allora

$$P' \cos \beta - Q \sin \alpha - f P' \sin \beta + f Q \cos \alpha = 0$$

ossia, immediatamente

$$P' = Q \frac{\sin \alpha - f \cos \alpha}{\sin \gamma - f \cos \gamma} \quad (15)$$

la quale è minima, come facilmente si controlla, quan-  
do risulta

$$\gamma = \frac{\pi}{2} + \varphi$$

La (15) con la (11) (nel moto retrogrado la  $P_0$  non  
muta, se ci si riferisce al regime assoluto, supponendo  
al solito assenti le resistenze di attrito), porge

$$\eta = \eta_r = \frac{P'}{P_0} = \frac{1 - f \cot \alpha}{1 - f \cot \gamma} \quad (16)$$

La (16) si particularizza per  $P(T)$  parallela al piano inclinato (condizione a) e orizzontale (condizione b).  
Condizione a: si ha  $\beta = 0$ , quindi  $\gamma = \pi/2$ . Sicchè

$$P' = T' = Q \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} = Q \sin \alpha - fQ \cos \alpha$$

e dunque

$$\eta = \eta_r = \frac{T'}{T_0} = 1 - f \cot \alpha \quad (17)$$

Condizione b: si ha  $\beta = -\alpha$ , quindi  $\gamma = \frac{\pi}{2} + \alpha$ . Pertanto

$$P_1 = Q \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)$$

$$\eta = \eta_r = \frac{P_1}{P_0} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{tg} \alpha} \quad (18)$$

Le (17) e (18) sono ovviamente ricavabili in via diretta dalla (16).

2) E'  $\alpha < \varphi$ . Questa è una condizione di rendimento negativo nel moto retrogrado. Infatti la (16) è minore di zero (supposto che sia  $\gamma > \varphi$  come in pratica è con gli usuali valori del coefficiente d'attrito; v. fig.7) quando

$$1 - f \cot \alpha < 0$$

ossia

$$\operatorname{tga} < \operatorname{tga}$$

$$\alpha < \varphi$$

In tale ipotesi il grave s'arresta ("arresto spontaneo") a meno che non gli si applichi una forza orientata in senso opposto alla  $P'$  precedente e cioè di tal verso da determinare la discesa.

Se fosse  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  ( $T$  parallela al piano inclinato) per  $\alpha < \varphi$  risulterebbe (nel moto diretto)

$$0 < \eta < 0,50$$

ma diminuendo opportunamente  $\gamma$  si raggiungerebbero valori del rendimento superiori a 0,50.

3)  $E' \alpha = \varphi$ . E' questa una condizione limite corrispondente al passaggio dell'arresto spontaneo alla discesa spontanea del grave; esso si trova nello stato prossimo al moto nel senso che, se per una causa qualunque (urto, vibrazione) ha origine il movimento di discesa, questo prosegue per effetto della sola componente di  $Q$  parallela al piano. Evidentemente nella citata condizione il rendimento è nullo.

4)  $E' \alpha = \varphi; \gamma < \frac{\pi}{2}$ . In tale ipotesi il rendimento (re

lativo al moto diretto) ha valore non minore nè uguale a 0,50, per quanto da tale valore poco si discosti. E' facile controllare ciò tenendo presente che per  $\gamma \leq \pi/2$  risulta certamente

$$\Sigma R' > \Sigma R$$

(la forza tangenziale d'attrito, unica resistenza passiva da considerare, ha maggiore valore nel moto inverso che in quello diretto), quindi la condizione (9) che porta il rendimento del moto diretto sotto 0,50 non regge più. D'altronde è possibile lo stesso controllo per altra via giacchè per  $\alpha = \varphi$  la (13) diventa

$$\eta = \frac{1}{2} (1 + \operatorname{tg} \varphi \cot \gamma) \quad (19)$$

che, per  $\gamma < \frac{\pi}{2}$ , fornisce appunto  $\eta > 0,5$ .

5)  $\alpha = \varphi$ ;  $\gamma \geq \frac{\pi}{2}$ . Risulta con tale ipotesi  $\eta \leq 0,5$  (moto diretto) perchè ci si trova allora nella condizione (9). In altre parole accade che la P ammetta una componente normale al piano la quale aumenta il valore della pressione esercitata dalla Q e quindi il lavoro perduto per attrito. Anche qui la (13), scritta nella forma (19), consente l'immediata verifica.

## LA COPPIA ELICOIDALE

### 1) Generalità

La coppia vite-madrevite è realizzata mediante superficie elicoidali conassiche, due delle quali sono continuamente combacianti durante il moto relativo dei due membri. Di tali due superficie che limitano il filetto una sola è "attiva" quando il movimento relativo si verifica in un dato senso; le altre superficie elicoidali, non combacianti, reagiscono soltanto ad eventuali azioni normali al l'asse o riducibili a tali.

Fissato uno dei membri l'altro si muove con moto elicoidale. Se entrambi i membri sono mobili (e occorre allora un telaio fisso per completare il meccanismo) u-no è dotato di moto rotatorio e l'altro di un movimento di traslazione. Anche in questo caso il moto relativo è sempre elicoidale ed il suo studio non differisce pertanto da quello della coppia con un membro fisso e l'altro mobile.

Se  $p$  è il passo della filettatura ed  $r$  il raggio medio del filetto, immaginando di svolgere l'elica media, la sua inclinazione rispetto ad un piano normale all'asse della vite sarà (fig. 8)

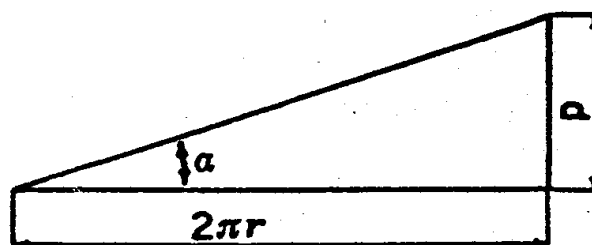


figura 8



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{2 \pi r} \quad (20)$$

L'inclinazione delle eliche di contatto tra vite e madre vite diminuisce da quelle interne a quelle esterne perchè, a parità di passo  $p$ , aumenta la loro lunghezza.

Altro elemento geometrico - nelle viti a filetto triangolare - è l'inclinazione delle generatrici dell'elicoide (contenute nel piano diametrale della vite) sul piano normale al suo asse, misurata dalla semiapertura  $\theta$  della sezione del filetto, fatta con un piano contenente l'asse della vite. Il cennato angolo vale ad esempio  $30^\circ$  nelle filettature triangolari metriche.

La normale  $n$  all'elicoide in un punto qualsiasi dell'elica media forma con l'asse della vite un angolo  $\beta$  che dipende dall'angolo d'inclinazione  $\theta$  delle generatrici. Nel caso del filetto rettangolare la normale suddetta è tangente alla superficie cilindrica contenente l'elica media, quindi

$$\beta = \alpha$$

Nel caso del filetto triangolare si può pervenire ad una relazione del tipo  $\beta = f(\theta, \alpha)$  attraverso il seguente procedimento vettoriale (fig. 9). Valutiamo le componenti secondo tre assi di riferimento del prodotto esterno di due versori: l'uno  $t$  tangente all'elica media e l'altro,  $g$ , coincidente con la generatrice dell'elicoide. Tale prodotto è normale ai due fattori, ossia alla superficie alla quale i due versori sono tangenti.

Scegliamo quindi come riferimento l'asse  $z$  parallelo all'asse  $z_0$  della vite; quelli  $x$  ed  $y$  nel piano normale a quello di  $z$ , in maniera tale che  $x$  sia diretto secondo

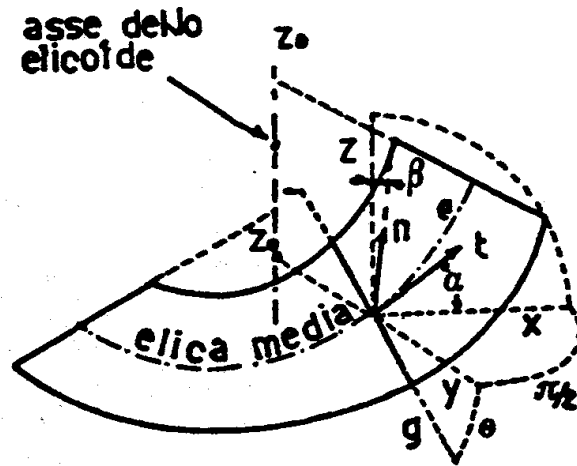


figura 9

la proiezione di  $t$ , che forma con esso l'angolo  $\alpha$ , inclinazione dell'elica media ed  $y$  secondo quella di  $g$  che forma con esso l'angolo  $-\theta$  d'inclinazione della generatrice. Siano inoltre  $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$  i versori sugli assi  $x, y, z$ . Potrà scriversi

$$\underline{n} = \frac{\underline{t} \wedge \underline{\varphi}}{\text{mod}(\underline{t} \wedge \underline{\varphi})}$$

e, poichè

$$t = i \cos \alpha + K \sin \alpha$$

$$g = j \cos \theta - K \sin \theta$$

potrà anche scriversi

$$\underline{t} \wedge \underline{g} = \begin{vmatrix} i & j & K \\ \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \end{vmatrix} =$$

$$= -\underline{i} \sin \alpha \cos \theta - \underline{j} \sin \theta \cos \alpha + \underline{K} \cos \alpha \cos \theta \quad (21)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \text{mod}(\underline{t} \wedge \underline{g}) &= \sqrt{\sin^2 \alpha \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cos^2 \theta} = \\ &= \sqrt{\sin^2 \alpha \cos^2 \theta + \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \theta} \quad (22) \end{aligned}$$

sicchè

$$\underline{n} = \frac{-\underline{i} \sin \alpha \cos \theta - \underline{j} \sin \theta \cos \alpha + \underline{K} \cos \alpha \cos \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \theta}}$$

D'altra parte dalla (21) appare che la proiezione di

$\underline{t} \wedge \underline{g}$  su  $z$  è  $\cos \alpha \cos \theta$  e dunque si ha anche, dal rapporto di tale proiezione alla (22), il coseno dell'angolo tra  $z$  ed  $\underline{n}$ , ossia

$$\cos \beta = \frac{\cos \alpha \cos \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \theta}} \quad (23)$$

## 2) Modi di azione della coppia elicoidale.

Fissando uno dei membri della coppia elicoidale, per esempio la vite, supponiamo applicate alla madrevite  $\underline{u}$  una coppia di momento  $M_0$  ed una forza  $Q$  l'uno e l'altra dirette secondo l'asse geometrico della vite. Sono proprio queste le condizioni dinamiche nelle quali viene generalmente a lavorare la coppia elicoidale.

La macchina può operare in due modi secondo che l'azione motrice sia quella di  $M_0$  o di  $Q$ , ossia secondo che essa macchina lavora per effetto del moto rotatorio respingendo la forza assiale oppure per effetto della traslazione respingendo la coppia.

Dei due modi indicati il primo è il più comune e vien detto "normale" o "diretto"; rispetto ad esso il secondo rappresenta il moto "inverso".

## 3) Regime assoluto ideale.

Se si fa astrazione dalle resistenze passive, il problema dinamico della vite è indipendente dalla forma del filetto.

Trattandosi di una macchina a regime assoluto, basta infatti uguagliare il lavoro motore al lavoro resi-

stente per un intervallo qualsiasi di tempo (v. la (5)).  
Conviene scegliere come intervallo quello corrispondente ad un intero giro, per il quale il punto d'applicazione di  $Q$  si sposta di una quantità uguale al passo. L'equazione dei lavori è dunque

$$2\pi M_o = Qp$$

Dividendo ambo i membri per  $2\pi$  e tenendo presente la (20) si ha:

$$\frac{M_o}{r} = Q \operatorname{tg} \alpha \quad (24)$$

Nella fig. 10 la (24) è interpretata col triangolo di e

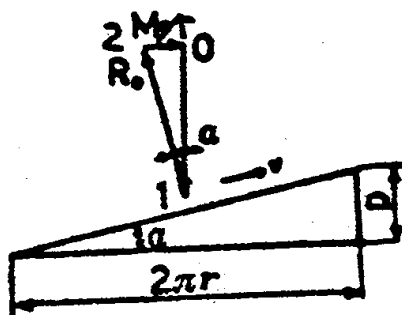


figura 10

quilibrio i cui lati sono rispettivamente verticale, normale alla direzione inclinata che assume l'elica media sviluppata, ed orizzontale. Ciò dimostra l'equivalenza del

presente problema con quello del piano inclinato, nel quale la forza motrice sia orizzontale. Prende il posto di tale forza motrice il rapporto  $M_0/r$ , ossia la forza che applicata tangenzialmente al cilindro coassiale di raggio medio, avrebbe momento  $M_0$  rispetto all'asse.

E invero la superficie attiva della vite si può riguardare come la zona del piano inclinato, lungo la quale il carico sale, avvolta ad elica intorno ad un asse verticale.

4) Lavoro di attrito della vite - Regime assoluto effettivo - Rendimento.

Consideriamo ora l'effetto dell'attrito immaginando per semplicità il contatto limitato all'elica media. In tale ipotesi le azioni applicate al membro mobile madre vite, che la fig. 11 rappresenta come provenienti dalla vite,

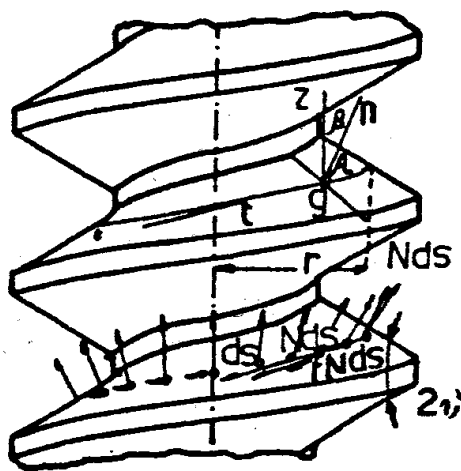


figura 11

hanno una componente diretta secondo la normale  $n$  all'elicoide formante l'angolo  $\beta$  con l'asse della vite, ed

un'altra secondo la tangente  $t$  all'elica media, inclinata sull'asse dell'angolo  $\pi/2 - \alpha$ .

Chiameremo  $(N)$  il valore della prima per unita' di lunghezza dell'arco di elica a cui il contatto si estende, tenendo presente che la parentesi sta a significare una forza divisa per una lunghezza. Sarà  $f \cdot (N)$  il valore della seconda componente riferita alla stessa lunghezza.

Per ogni elemento  $ds$  dell'arco di elica media a cui il contatto si estende, abbiamo le forze  $(N)ds$  e  $f \cdot (N)ds$  delle quali la prima non fa lavoro durante il moto della vite, la seconda sviluppa il lavoro che viene perduto.

Nell'intervallo considerato, in cui il sistema compie un giro, i punti dell'elica media percorrono un'intera spirale lunga  $p/\sin\alpha$ .

Le forze  $f(N)ds$  sono dirette tangenzialmente all'elica, quindi il lavoro perduto è

$$L_r = \int f \cdot (N)ds \frac{p}{\sin\alpha} = f \cdot (N) \frac{p}{\sin\alpha} s \quad (25)$$

Nell'ipotesi semplificativa che la forza  $(N)$  sia uniformemente distribuita ed il coefficiente d'attrito  $f$  sia costante, tutti i termini finiti sotto il segno d'integrale sono costanti e l'integrazione si limita alla somma degli elementi  $ds$ . Ne risulta dunque la lunghezza totale dello arco  $s$  di elica media per tutto il tratto lungo il quale vite e madrevite sono a contatto.

Evidentemente nella (25) non è nota la  $(N)s$ . Essa però può essere determinata con condizioni di equilibrio relative a spostamenti non consentiti dai vincoli.

Conviene in questo caso ricorrere all'equazione di equilibrio alla traslazione secondo l'asse  $z$ , poichè in essa non compare il momento motore incognito  $M$ .

Proiettando dunque su  $z$  sia  $(N)ds$  che  $f \cdot (N)ds$ , si ottengono la  $N \cos \beta ds$  e la  $f \cdot (N) \sin \alpha ds$ ; la prima rivolta in senso opposto, la seconda nello stesso senso di  $Q$ .

Sommando tali valori per tutto l'arco  $s$  di contatto, sempre nella ipotesi di  $(N)$  costante, si ha, per l'equilibrio alla traslazione nella direzione dell'asse

$$(N) \cos \beta s = Q + f \cdot (N) \sin \alpha s$$

da cui

$$(N) \cdot s = \frac{Q}{\cos \beta - f \sin \alpha} \quad (26)$$

che, sostituita nella (25), porge

$$L_r = Q \frac{f}{\cos \beta - f \sin \alpha} \cdot \frac{p}{\sin \alpha} \quad (27)$$

Se ora è  $M$  il momento motore effettivo, uguagliando il suo lavoro alla somma del lavoro della resistenza  $Q$  e delle resistenze passive, si ha (regime assoluto effettivo)

$$2 \pi M = Qp + Qp \frac{f}{\sin \alpha (\cos \beta - f \sin \alpha)} \quad (28)$$



ovvero

$$2\pi M = Qp \frac{\operatorname{tg}\alpha \cos\beta + f \cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha (\cos\beta - f \sin\alpha)} \quad (29)$$

equazione che consente la determinazione dell'azione motrice effettiva.

a) Moto diretto.

Può scriversi, quale espressione del rendimento di una vite nel moto diretto

$$\eta = \frac{L_u}{L_m}$$

cioè, essendo  $L_u = Qp$ , per la (28)

$$(30) \quad \eta = \operatorname{tg}\alpha \frac{\cos\beta - f \sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha \cos\beta + f \cos\alpha} = \frac{\cos\beta \sin\alpha - f \sin^2\alpha}{\cos\beta \sin\alpha + f \cos^2\alpha}$$

b) Moto inverso.

Se è motrice la forza  $Q$ , il membro mobile (generalmente la madrevite, come si disse) della coppia elicoidale deve invertire il suo moto, sicchè cambiano senso le resistenze passive e quindi nelle relazioni soprascritte cambiano segno i termini contenenti  $f$ . Risulta dunque per il lavoro perduto per attrito

$$L'_r = Q \frac{f}{\cos \beta + f \sin \alpha} \frac{P}{\sin \alpha} \quad (31)$$

D'altra parte, essendo  $Q_p$  il lavoro motore,  $2\pi M$  il lavoro resistente, l'equazione dell'equilibrio dinamico diventa

$$Q_p = 2\pi M + L'_r$$

cioè, dopo trasformazioni analoghe a quelle relative alla (29),

$$2\pi M = Q_p \frac{\operatorname{tg} \alpha \cos \beta - f \cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha (\cos \beta + f \sin \alpha)}$$

che consente di rintracciare il rendimento nel moto inverso

$$\eta = \eta_r = \frac{2\pi M}{Q_p} = \frac{\operatorname{tg} \alpha \cos \beta - f \cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha (\cos \beta + f \sin \alpha)} \quad (32)$$

Si osservi che il rapporto  $L_r/L'_r$  risulta maggiore di uno, il che significa che il lavoro perduto per attrito è maggiore nel moto diretto.

##### 5) Diagrammi dei rendimenti.

Nella fig. 12 si sono tracciati i diagrammi del rendimento

mento della vite nel moto diretto (linea intera) e nel mo-  
to inverso (linea a tratti) riportando come ascisse l'an-  
golo  $\alpha$  d'inclinazione dell'elica media (variabile da  $0^\circ$  a

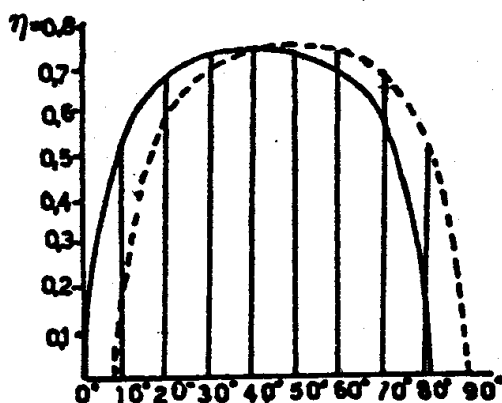


figura 12

$90^\circ$ ) ed assumendo  $\beta = \alpha$  (filetto rettangolare) nonchè  $f=0,14$  corrispondente all'angolo di attrito  $\varphi = 8^\circ$ .

Da tali diagrammi appare che la vite ha rendimenti assai bassi per piccoli e per grandi angoli d'inclinazione del suo filetto medio, tanto nel caso del moto diretto (coppia motrice) quanto nel caso del moto inverso (forza assiale motrice). In entrambi i casi raggiunge il suo rendimento massimo in prossimità di  $\alpha = \pi/4$  e lo conserva elevato fra  $20^\circ$  e  $70^\circ$ .

Coi piccoli angoli d'inclinazione (minori di  $\pi/4$ ) è maggiore il rendimento del moto diretto, coi grandi angoli (maggiori di  $\pi/4$ ) è maggiore il rendimento del moto inverso. Pertanto si usano i piccoli passi nel caso del comando attraverso coppia motrice, i grandi passi invece, nel caso, più raro, in cui una forza motrice diretta secondo l'asse induce la rotazione della vite.

6) Vite a filetto rettangolare.

In questo caso è, come già detto,  $\beta = \alpha$ . La (30) si scrive, sostituendo  $\text{tg}\varphi$  ad  $f$

$$\eta = \text{tg}\alpha \cdot \left[ \frac{1 - \text{tg}\alpha \text{tg}\varphi}{\text{tg}\alpha + \text{tg}\varphi} \right]$$

e quindi

Visa 20  
162 →

$$\eta = \frac{\text{tg}\alpha}{\text{tg}(\alpha + \varphi)}$$

(33)

che coincide con la (14), formula del rendimento del piano inclinato con forza motrice orizzontale. Si ha così un'ulteriore conferma dell'equivalenza dei due problemi. Anzi in questo caso l'equazione dell'equilibrio dinamico (28) diventa

$$\frac{M}{r} = Q \text{tg}(\alpha + \varphi) \quad (34)$$

La (34) è suscettibile di una interpretazione grafica simile a quella della fig. 10 col triangolo di equilibrio della fig. 13 di cateto verticale  $Q$ , orizzontale  $M/r$  ed angolo opposto a quest'ultimo  $(\alpha + \varphi)$ , come potrebbe vedersi anche nella trattazione grafica del piano inclinato con forza motrice orizzontale.

La (33) si annulla tanto per  $\alpha = 0$  (ciò è evidente: ad inclinazione nulla corrisponde  $L_u = 0$ ) quanto per  $\alpha = \pi/2 - \varphi$

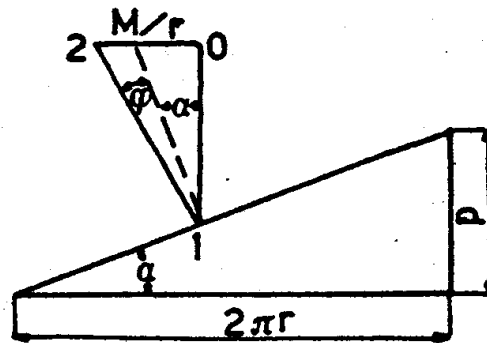


figura 13

(condizione questa che, stante la (34), corrisponde ad una forza motrice infinitamente grande). Deve aversi quindi, fra i due ora accennati, un valore di  $\alpha$  che renda massimo  $n$ , valore immediatamente determinabile eguagliando a zero la derivata prima, rispetto a  $\operatorname{tg}\alpha = x$ , della (33). Si trova:

$$\operatorname{tg}\alpha = -f + \sqrt{1 + f^2} \quad (35)$$

e, per  $f$  piccolo,

$$\operatorname{tg}\alpha \simeq 1 - f.$$

Per i valori correnti di  $f$  risulta  $\alpha = 45^\circ$  (ad es. per  $f = 0,13$  si ha  $\alpha = 41^\circ$ ), il che mostra - per essere gli angoli d'inclinazione correntemente usati assai più piccoli di  $45^\circ$  - che le viti a filetto rettangolare lavorano in condizioni ben lontane da quelle corrispondenti al massimo rendimento. Angoli prossimi a  $45^\circ$  s'impiegano soltanto in altri meccanismi (es. ruote elicoidali).

Nelle viti, per gli usi ordinari della pratica, deve essere evitato il pericolo dello svitamento spontaneo che incomincerebbe a verificarsi a partire dalla condizione limite di reciprocità  $\alpha = \varphi$ . Ossia deve garantirsi l'arresto spontaneo.

Per la citata condizione si ha:

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} 2 \varphi} = (1) = \frac{1}{2} (1 - f^2) \quad (36)$$

evidentemente minore di 0,5 (come del resto è per  $\alpha < \varphi$ ). Alla (36) corrispondono i seguenti valori numerici

$f = 0,05$	$0,10$	$0,15$	$0,20$	$0,25$
$\eta = 0,499$	$0,495$	$0,489$	$0,480$	$0,469$

Nelle condizioni di massimo rendimento dianzi esaminate (v. la 35)) risulterebbe invece

per $f = 0,05$ :	$\alpha = \varphi = 43^{\circ}30'$ ;	$\eta = 0,90$
" $= 0,10$ :	$\alpha = \varphi = 42^{\circ}$ ;	$\eta = 0,82$
" $= 0,15$ :	$\alpha = \varphi = 40^{\circ}20'$ ;	$\eta = 0,75$ ;

---

(1)  $\operatorname{tg} 2\varphi = 2\operatorname{tg}\varphi / (1 - \operatorname{tg}^2\varphi)$

e poichè, per lasciare opportuno margine di garanzia contro l'accennato pericolo dello svitamento spontaneo, si assume  $\alpha < \varphi$ , il rendimento - che diminuisce con  $\alpha$  a partire dai valori di  $\alpha$  relativi alla formula (35) (4) - viene ad avere, di fatto, valori ancora più piccoli di quelli dati dalla (36).

Peraltro va tenuto presente che quando l'azione motrice esterna, anzichè come coppia, operi come forza isolata, sghemba a  $90^\circ$  con l'asse della vite, nasce evidentemente, fra vite e madrevite, una forza di pressione orizzontale a cui corrispondono, contribuendo ad abbassare maggiormente il rendimento, ulteriori resistenze fra le superficie cilindriche delimitanti i filetti e fra le eventuali guide che completano il meccanismo.

Il rendimento scema ancora se la madrevite abbraccia la vite per meno di una spira intera, perchè allora la risultante delle pressioni fra le superficie attive non risulta più diretta secondo l'asse, bensì scentrata, così da provocare, per pressioni laterali, altre resistenze d'attrito.

#### 7) Vite a filetto triangolare.

Nella vite a filetto triangolare l'angolo  $\beta$  dipende dalla inclinazione  $\alpha$  e dalla semiapertura  $\theta$  del filetto, secondo la (23). Si noti anzitutto che è comunque  $\beta > \alpha$ . Si osservi poi che il fattore che nella (23) moltiplica  $\cos\alpha$  è minore di uno, salvo nel caso limite in cui raggiunge il suo massimo diventando  $\alpha = \pi/2$ .

In conseguenza, come si deduce dalle (27) e (31), il lavoro di attrito, sia nell'uno, sia nell'altro modo di a

---

(4) Va notato che con valori di  $\alpha$  prossimi a quelli corrispondenti al massimo rendimento, cioè prossimi a  $45^\circ$ , si verrebbe a rinunciare al vantaggio delle forte moltiplicazione della forza applicata (v. in fig. 3 come cresce  $N/r$  al crescere di  $\alpha$ ).

zione, riesce maggiore nella vite a filetto triangolare, perchè il termine  $\cos\beta$  al denominatore è più piccolo. Quindi il rendimento della vite a filetto triangolare è più basso di quello della vite a filetto rettangolare di uguale inclinazione. A tale conclusione si arriva anche tramite la (30) allorchè sia scritta nella forma

$$\eta = \frac{\sin\alpha - \frac{f\sin^2\alpha}{\cos\beta}}{\sin\alpha + \frac{f\cos^2\alpha}{\cos\beta}} \quad (37)$$

che mostra come al crescere di  $\beta$ , a partire da  $\beta = \alpha$ , il numeratore diminuisce ed il denominatore aumenta, per cui  $\eta$  decresce.

Ci si trova in condizioni limite di reciprocità quando risulti

$$Q_p = L_r'$$

cioè se

$$Q_p = \frac{f Q_p}{(\cos\beta + f\sin\alpha)\sin\alpha}$$

da cui

$$\cos\beta\sin\alpha + f\sin^2\alpha = f$$

ossia

$$\cos\beta\sin\alpha = f\cos^2\alpha \quad (38)$$



A partire da tale condizione limite, ed a maggior forza quando sia,

$$\cos\beta \sin\alpha < f \cos^2\alpha$$

la condizione di arresto spontaneo è verificata e il rendimento nel moto diretto, per la dimostrazione fatta a proposito dei meccanismi ad arresto spontaneo e ripetuta per le filettature rettangolari, diventa minore o uguale a 0,5.

Con riferimento alla filettatura triangolare metrica ISO si ha

$$\theta = 30^\circ; \quad \cos\theta = 0,866; \quad \sin^2\theta = 0,25$$

e quindi, per la (23),

$$\cos\beta = 0,866 \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - 0,25 \sin^2\alpha}}$$

la quale, poichè l'angolo  $\alpha$  è sempre assai piccolo, diventa

$$\cos\beta \approx 0,866 \cos\alpha$$

sicchè la condizione limite di reciprocità (38) porge

$$0,866 \sin\alpha = f \cos\alpha$$

ossia

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f}{0,866} \approx 1,15 f.$$

Questo risultato mette in evidenza il vantaggio della vite a filetto triangolare come organo di collegamento. Invero, mentre col filetto rettangolare le condizioni di reciprocità si raggiungono per  $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha$  ( $\alpha = \varphi$ ), con le filettature triangolari l'arresto spontaneo si verifica ancora per angoli  $\alpha$  più grandi di  $\varphi$ . E' quindi minore il pericolo dell'allentamento della chiusura.

Per viti usate come organi di trasmissione, a filetto trapezoidale (coppia vite senza fine-ruota elicoidale), si assume di norma  $\theta = 15^\circ$ . Sicchè

$$\cos \beta = \frac{0,866}{\sqrt{1 - 0,067 \sin^2 \alpha}} \cos \alpha.$$

Sviluppando in serie il radicale e considerando soltanto i primi due termini dello sviluppo

$$\cos \beta = \frac{0,866}{1 - 0,034 \sin^2 \alpha} \cos \alpha \approx \cos \alpha$$

e cioè

$$\beta \approx \alpha.$$

Ma per  $\beta = \alpha$  si ricade nel caso del piano inclinato

con forza orizzontale e quindi in quello della vite a filetto rettangolare. Le formule di tali casi sono pertanto valide anche nell'esempio citato in cui sia  $\theta = 15^\circ$ .

NOTA: PROCEDIMENTO VETTORIALE DI CALCOLO DEI RENDIMENTI DELLE FILETTATURE.

Può pervenirsi alle espressioni del rendimento relativo alle filettature attraverso un procedimento vettoriale.

a) Filettatura rettangolare.

Siano, in un punto O (fig. 14), F la forza applicata che, moltiplicata per il raggio medio, dà luogo

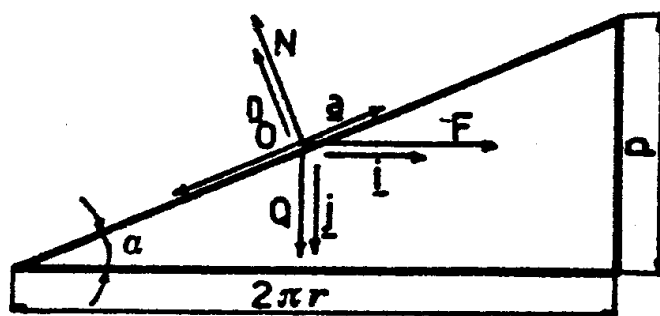


figura 14

al momento M necessario all'avvitamento; ed inoltre ancora Q la forza che si oppone allo svitamento, applicata parallelamente all'asse, N la reazione normale del filetto ed  $A = fN$  la forza di attrito parallela al filetto e diretta in senso contrario al moto.

Per l'equilibrio dell'elemento di filetto considerato, e

che appartiene alla spira di un intero filetto rettangolare sviluppato in piano, dovrà essere

$$\underline{Q} + \underline{F} + \underline{N} + \underline{A} = 0.$$

Assegnamo i versori riportati in fig. 14 ed inoltre quello  $\underline{k}$  normale al foglio e diretto in maniera tale da vedere  $\underline{i}$  sovrapporsi ad  $\underline{j}$  nel verso orario. Essendo  $\underline{n}$  normale al piano di  $\underline{a}$  e  $\underline{k}$ , si avrà

$$\underline{n} = \frac{\underline{a} \wedge \underline{k}}{\text{mod}(\underline{a} \wedge \underline{k})}$$

e, poichè

$$\underline{a} = i \cos \alpha - j \sin \alpha \quad (39)$$

potrà anche scriversi

$$\underline{a} \wedge \underline{k} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -i \sin \alpha - j \cos \alpha$$

e quindi

$$\text{mod}(\underline{a} \wedge \underline{k}) = \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = 1$$

sicchè

$$\underline{n} = -i \sin \alpha - j \cos \alpha. \quad (40)$$

La (39) e la (40) esprimono i versori  $\underline{a}$  ed  $\underline{n}$  in funzione di  $\underline{i}$  e  $\underline{j}$ . Dunque esistono due sole equazioni di equilibrio, secondo  $\underline{i}$  e secondo  $\underline{j}$ . Esse sono, rispettivamente

$$F - N \sin \alpha - f N \cos \alpha = 0$$

$$Q - N \cos \alpha + f N \sin \alpha = 0$$

da cui

$$\frac{F}{Q} = \frac{\sin \alpha + f \cos \alpha}{\cos \alpha - f \sin \alpha}$$

e, dividendo numeratore e denominatore per  $\cos \alpha$ , avendo posto  $f = \operatorname{tg} \varphi$ ,

$$F = Q \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \alpha} = Q \operatorname{tg} (\alpha + \varphi).$$

D'altra parte, in mancanza di attrito, sarebbe

$$f = \operatorname{tg} \varphi = 0$$

corrispondente ad

$$F_o = Q \operatorname{tg} \alpha$$

e quindi

$$\eta = \frac{F_o}{F} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}$$

b) Filettatura triangolare

In tal caso la doppia inclinazione (figg. 15) dell'elicoide consente di dire che l'equilibrio non è limitato al piano di i e j poichè esiste una componente di N anche su k.

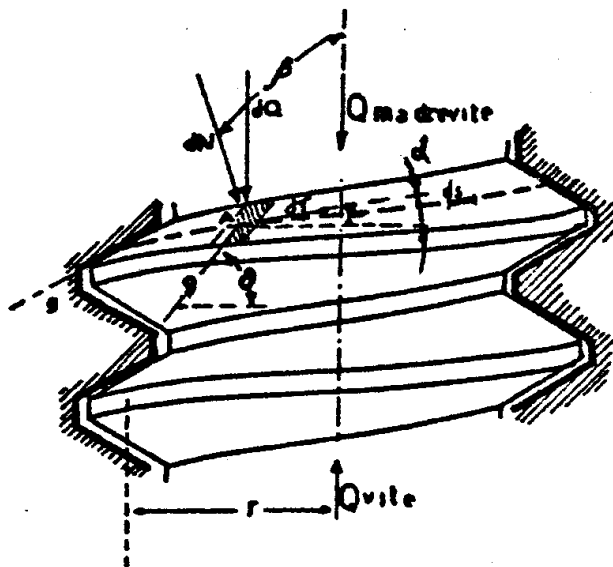


figura 15 a)

Orbene, oltre al versore a, consideriamo in O quello b diretto secondo il fianco del filetto - che è inclinato di  $\theta/2$  - ed orientato come in fig. 16. Il versore n sarà normale al piano di a e b passante per O e per

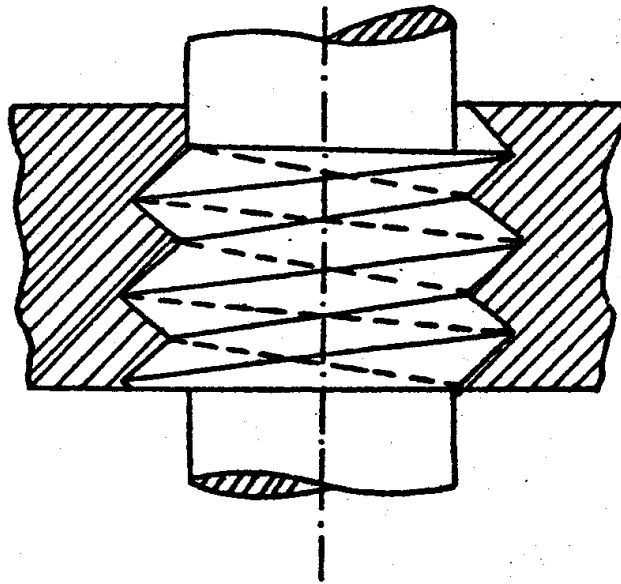


figura 15 b)

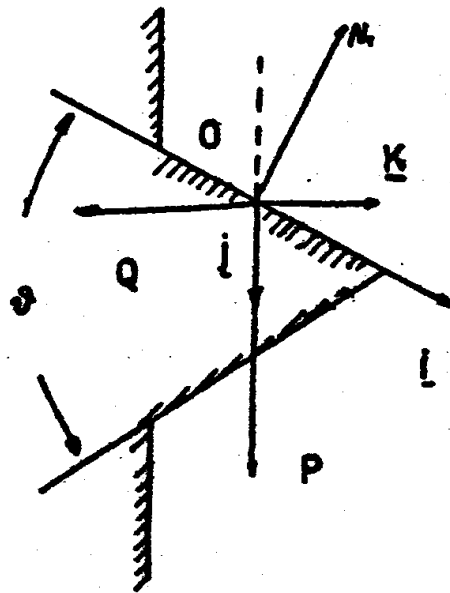


figura 15 c)

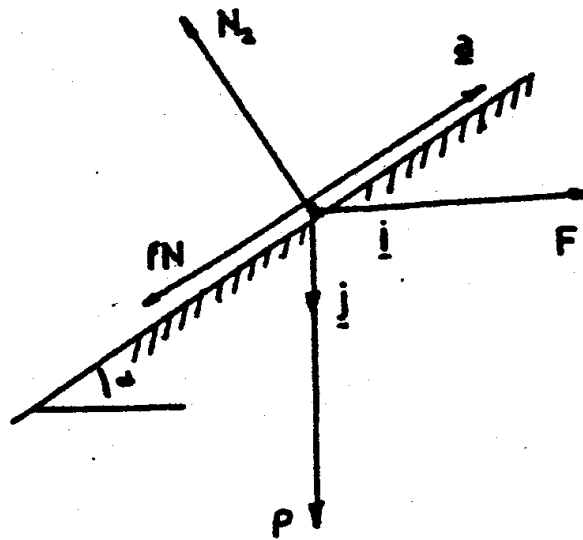


figura 15 d)

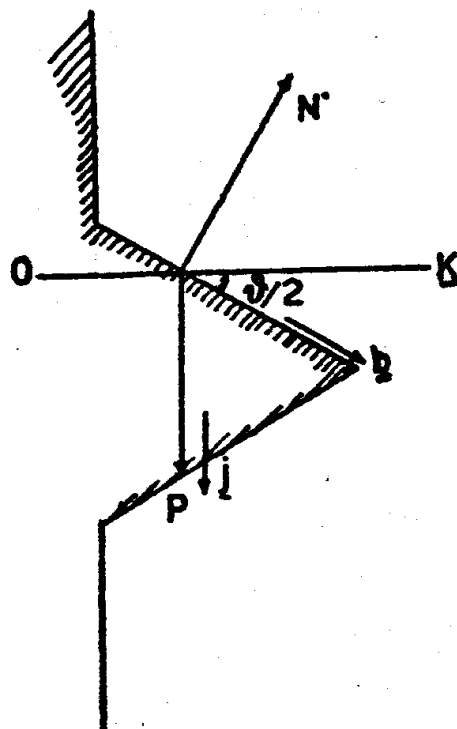


figura 16



tanto potrà scriversi

$$\underline{n} = \frac{\underline{a} \wedge \underline{b}}{\text{mod}(\underline{a} \wedge \underline{b})}$$

e, poichè

$$a = i \cos \alpha - j \sin \alpha$$

$$b = j \sin(\theta/2) + K \cos(\theta/2)$$

potrà anche scriversi

$$\underline{a} \wedge \underline{b} = \begin{vmatrix} i & j & K \\ \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{vmatrix} = \begin{aligned} & -i \sin \alpha \cos(\theta/2) - \\ & -j \cos \alpha \cos(\theta/2) + \\ & + K \cos \alpha \sin(\theta/2) \end{aligned}$$

e quindi

$$\text{mod}(a \wedge b) = \sqrt{\sin^2 \alpha \cos^2(\theta/2) + \cos^2 \alpha \cos^2(\theta/2) + \cos^2 \alpha \sin^2(\theta/2)} \approx 1$$

giacchè  $\beta = 60^\circ$  ed  $\alpha \leq 8^\circ$ .

Pertanto risulterà

$$\underline{n} = -i \sin \alpha \cos(\theta/2) - j \cos \alpha \cos(\theta/2) + K \cos \alpha \sin(\theta/2)$$

e le componenti di N secondo i, j, k saranno nell'ordine

$$- N \sin \alpha \cos (\theta / 2)$$

$$- N \cos \alpha \cos (\theta / 2)$$

$$N \cos \alpha \sin (\theta / 2) .$$

L'equilibrio secondo le menzionate direzioni verrà espresso dalle equazioni

$$F - N \sin \alpha \cos (\theta / 2) - f N \cos \alpha = 0$$

$$Q - N \cos \alpha \cos (\theta / 2) + f N \sin \alpha = 0$$

$$N \cos \alpha \sin (\theta / 2) - P = 0$$

essendo P la forza che, lungo k, dovrà equilibrare la corrispondente componente di N. Dunque si scriverà

$$F = N [\sin \alpha \cos (\theta / 2) + f \cos \alpha]$$

$$Q = N [\cos \alpha \cos (\theta / 2) - f \sin \alpha]$$

$$P = N \cos \alpha \sin (\theta / 2) .$$

Dal rapporto delle prime due risulterà (dividendo numeratore e denominatore per  $\cos\alpha\cos(\theta/2)$  e sostituendo  $\text{tg}\varphi$  ad  $f$ )

$$\frac{F}{Q} = \frac{\text{tg}\alpha + \frac{\text{tg}\varphi}{\cos(\theta/2)}}{1 - \frac{\text{tg}\alpha\text{tg}\varphi}{\cos(\theta/2)}}$$

la quale, posto

$$\text{tg}\varphi' = f' = \text{tg}\varphi/\cos(\theta/2), \quad (41)$$

diventa

$$F = Q \frac{\text{tg}\alpha + \text{tg}\varphi'}{1 - \text{tg}\alpha\text{tg}\varphi'} = Q\text{tg}(\alpha + \varphi')$$

formula analoga, solo formalmente, a quella relativa al rendimento del filetto rettangolare.

Poichè anche nella filettatura a profilo triangolare si avrebbe  $F = F_0 = Q\text{tg}\alpha$  in mancanza di attrito, il rendimento è questa volta

$$\eta = \frac{F_0}{F} = \frac{\text{tg}}{\text{tg}(\alpha + \varphi')}$$

che, stante la (41), restituisce l'espressione del rendimento per filettature rettangolari nel caso che sia  $\theta=0$ . E' facile controllare che in tale ipotesi sarà  $P=0$  e, a parità di  $Q$ ,  $F$  ed  $N$  risulteranno ridotte, ciò che evidenzia il vantaggio del filetto a sezione rettangolare nelle viti di lavoro.

---

## GENERALITA' SUL DIMENSIONAMENTO E CALCOLO DI ELEMENTI FILETTATI

Escluso il caso - con pochi altri - delle viti di manovra per sollevamento pesi, nel quale è staticamente determinato il carico assiale e manca il forzamento iniziale, in tutte le applicazioni le viti trovano impiego per collegamenti forzati, nei quali cioè il serraggio iniziale produce tensioni anche in assenza di carichi esterni.

Soltanto la conoscenza sperimentale dell'allungamento elastico dell'elemento maschio consente di conoscere il valore della coppia di serraggio. D'altra parte tale conoscenza non fa risalire, in maniera esatta, al valore dello sforzo assiale prodotto, in quanto una parte non valutabile della menzionata coppia viene assorbita per vincere l'attrito tra le superficie d'appoggio e non è nemmeno precisamente noto l'angolo di attrito  $\varphi$  tra gli elementi accoppiati.

L'applicazione di un carico esterno induce poi la variazione delle sollecitazioni presenti. Per il calcolo degli sforzi agenti nelle varie parti del collegamento dovranno usare le relazioni note dallo studio sui collegamenti forzati.

Va qui precisato che le formule della trazione semplice permettono di calcolare facilmente la deformazione dell'elemento maschio, mentre non è chiaro come possa pervenirsi alla deformazione degli elementi interessati al collegamento (ad esempio flange premute da un bullone). L'esperienza mostra tuttavia che in questo caso si può ammettere una propagazione della compressione secondo una superficie conica a  $45^\circ$ , la quale parte (fig. 17) dalla circonferenza di contorno della superficie di appoggio del dado e da quella inscritta nella testa esagonale della vite, per cui è ancora possibile riferirsi alla formula della compressione semplice purchè s'intro

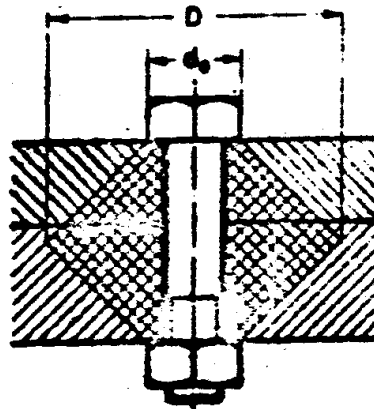


figura 17

duca al denominatore un valore medio  $S_m$  dell'area della sezione pari alla media armonica delle aree, cioè (1) un valore

$$S_m = \frac{\pi}{4} D d_0$$

essendo  $D$  e  $d_0$  i diametri delle sezioni estreme.

(1) Si ha (fig. 18), detto  $\delta$  il generico diametro

$$\delta = d_0 + 2x ; \quad d\delta = 2dx ; \quad l = \frac{D - D_0}{2} ;$$

$$\frac{1}{S_m} = \int_0^l \frac{dx}{\delta} = \frac{4}{\pi} \int_0^l \frac{dx}{\delta^2} = \frac{2}{\pi} \int_{d_0}^D \frac{d\delta}{\delta^2} =$$

$$= -\frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{D} - \frac{1}{d_0} \right] = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{D - d_0}{D d_0} \right]$$

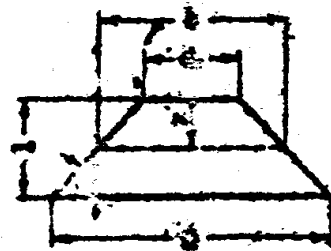


figura 18

Senza nulla dire relativamente ad altri casi (flange sollecitate a flessione, viti prigioniere, etc.) ove comunque il calcolo delle costanti elastiche degli elementi serrati dalla coppia vite-madrevite viene fatto con formule particolari o attraverso misure sperimentali, interessa qui notare che il calcolo di un collegamento con viti richiede dapprima la conoscenza, o la determinazione, della forza assiale agente nelle varie condizioni di carico e del momento torcente applicato al serraggio. In secondo luogo comporta il dimensionamento e la verifica del collegamento in tutti i suoi elementi e particolari (gambo della vite nelle sue varie sezioni, filettatura della vite e del dado, testa della vite, raccordi, etc.) ricorrendo al criterio che s'intende seguire: del calcolo a fatica, a scorrimento, di usura filetto (nelle viti di manovra), oppure della limitazione delle massime sollecitazioni o deformazioni statiche.

Qui di seguito s'indagherà sulle principali sollecitazioni che si hanno nei vari elementi prospettando anche come procedere ai menzionati dimensionamenti e verifiche.

## TENSIONI DI SERRAGGIO

Il momento  $M$  applicato al serraggio di una testa di vite è somma di quello  $M'$  occorrente per vincere la coppia d'attrito sulle superficie elicoidali più quello  $M''$  necessario invece ad equilibrare il momento resistente sulle facce piane in moto relativo,

$$M = M' + M'' \quad (42)$$

Vale qui la pena di osservare che, detto  $M'''$  il mo-

mento d'attrito sul piano sottoposto alla testa del maschio nel bullone, affinchè non si abbia rotazione simultanea del dado e del gambo dovrà risultare  $M'' > M'$ .

La pressione  $p''$  tra le facce piane in moto relativo di cui sopra varrà, se  $Q$  è al solito il carico di trazione nel gambo,

$$p'' = \frac{Q}{\pi(R_e^2 - R_i^2)}$$

in cui  $R_i$  ed  $R_e$  rappresentano i raggi interno ed esterno corrispondenti alla corona d'appoggio.

Risulterà di conseguenza

$$M'' = \int_{R_i}^{R_e} \int_0^{2\pi} p'' \bar{f} r^2 dr d\varphi$$

con  $\bar{f}$  coefficiente d'attrito,  $r$  raggio generico e  $\varphi$  anomalia. Supponendo  $p''$  uniformemente distribuita potrà scriversi

$$M'' = \frac{2}{3} \pi \bar{f} p'' (R_e^3 - R_i^3)$$

e, una volta posto

$$\bar{R} = \frac{2}{3} \frac{R_e^3 - R_i^3}{R_e^2 - R_i^2}$$

(ove evidentemente deve essere  $\bar{R} \geq (R_e + R_i)/2$ ),



$$M'' = \bar{f} Q \bar{R} . \quad (43)$$

D'altronde, se  $r_m$  è il raggio medio del filetto,  $\alpha$  la inclinazione della sua elica media,  $\varphi$  l'angolo di attrito fra filetto e madrevite ( $\text{tg}\varphi = f =$  coefficiente d'attrito), vale, per la vite a filetto rettangolare, la (34) e dunque

$$M' = Q r_m \text{tg}(\alpha + \varphi) . \quad (44)$$

Per la vite a filetto triangolare il corrispondente momento è fornito da una relazione solo formalmente analoga alla (44). Ad essa si perviene sfruttando la relazione fra forze rintracciata nella ricerca del rendimento di una filettatura triangolare con procedimento vettoriale, sicchè può ancora scriversi

$$M' = Q r_m \text{tg}(\alpha + \varphi') \quad (45)$$

dove  $\varphi'$  è fornito dalla (41). D'ora innanzi ci si riferirà al filetto rettangolare nell'intesa che quanto si dirà varrà anche per quello triangolare a patto che si sostituisca  $\text{tg}(\alpha + \varphi')$  a  $\text{tg}(\alpha + \varphi)$ .

Sperimentalmente sono risultati valori del rapporto  $M''/M$  variabili da 0,2 a 0,35 per viti lucide e da 0,30 a 0,56 per viti grezze. Si può ritenere nel caso di viti lucide, che è il più frequente,  $M''/M = 1/3$ , quindi  $M'/M = 2/3$  e, mediante le (43), (44),

$$\frac{M''}{M'} = \frac{\bar{R}}{r_m} \frac{\bar{f}}{\text{tg}(\alpha + \varphi)} = \frac{1}{2}$$

$M = \frac{2}{3} M'$

Più in generale si potrà ritenere che  $M'$  sia una funzione  $1/k$  di  $M$  dipendente dalla natura dei materiali, dalla loro finitura superficiale e dalle condizioni di lubrificazione, e scrivere allora

$$M' = \frac{1}{k} M \quad ; \quad M = kQ \frac{d_m}{2} \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \quad (46)$$

se  $d_m$  è il diametro corrispondente ad  $r_m$ .

Nella citata ipotesi il momento necessario per sviluppare al serraggio la forza assiale  $Q$  vale evidentemente

$$M = \frac{3}{2} Q \frac{d_m}{2} \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) .$$

La corrispondente della (29) relativa al moto inverso fornisce il momento necessario per svitare un dado serrato con sforzo assiale  $Q$ . Essa per  $\alpha = \beta$ , cioè per il caso di filetto rettangolare, se confrontata con la medesima (29), porge un valore  $\bar{M}$  del momento di svitamento funzione di  $M$  pari a

$$\bar{M} = M \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} = \bar{k} M .$$

Si sono rilevati sperimentalmente valori di  $\bar{k}$  crescenti da 0,7 a 0,98 al diminuire del rapporto passo/diametro. Conviene assumere nella maggior parte dei casi  $\bar{k} = 0,8$ .

L'esperienza dimostra che quando il serraggio è rea

lizzato affidandosi alla sensibilità dell'operaio esso riesce a regolare sufficientemente lo sforzo solo per viti di diametro medio, ma non piccolo e grande. Nella ipotesi citata, ove si ritenga che il serraggio venga effettuato con una lunghezza  $l$  di chiave di manovra pari ad un certo numero  $n$  (15+ 20) di diametri  $d_m$  e con una forza periferica costante  $F$  di qualche diecina di kp, sarà evidentemente,

$$M = F n d_m$$

che, confrontata con la seconda delle (46), porge

$$Q = \frac{2n}{k \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} F$$

ossia uno sforzo assiale approssimativamente costante se tali si ritengono, com'è lecito,  $k$ ,  $n$ ,  $\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$ .

La sostituzione della (43) e della (44) nella (42) consente di dire che è

$$Q = \frac{M}{f \bar{R} + r_m \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} \quad (47)$$

cui corrisponde la tensione nominale di trazione nel gambo ( $d_n$  è il diametro di nocciolo)

$$\sigma_n = \frac{4Q}{\pi d_n^2} \quad (48)$$

La (48) può scriversi

$$\sigma_n = \frac{Q}{S_n}$$

se con  $S_n$  s'indica l'area della sezione di nocciolo.

La proporzionalità inversa della sollecitazione al quadrato del diametro di nocciolo faceva sì che un tempo si prescrivesse di non usare, per collegamenti di una certa importanza, viti di diametro inferiore ai  $5/8''$  (circa 16 mm); attualmente alcune norme tedesche per le tubazioni ammettono anche viti di diametro minore, fino ad  $1/4''$  purchè aventi carichi di rottura crescenti al diminuire del diametro (da 38 a 65, quando il diametro scende da  $1/2''$  a  $1/4''$ ).

Ponendo

$$\beta = \frac{S_n}{S} = \left( \frac{d_n}{d} \right)^2,$$

ove  $d$  è il diametro nominale (1) di filettatura ed  $S$  l'area della corrispondente sezione circolare, può scriversi

$$\sigma_n = \frac{1}{\beta} \frac{Q}{S} = \frac{1}{\beta} \frac{4Q}{\pi d^2}$$

Il rapporto  $\beta$  varia evidentemente col tipo di filettatura, essendo minore per le filettature grosse rispetto alle fini, ma, per uno stesso tipo di filettatura, col dia

(1) Diametro nominale vite = diametro esterno vite.

metro, aumentando all'aumentare di esso.

La sollecitazione di trazione cui s'è fatto cenno e' quella predominante nel gambo delle viti. Essa viene trasmessa fra vite e madrevite attraverso un certo numero di spire in presa. Il carico da cui deriva non si ripartisce evidentemente in maniera uniforme fra i filetti in presa. In realtà è facile comprendere come la deformabilità di tali filetti, siano essi appartenenti all'elemento vite o madrevite tende a sovraccaricare la prima o le prime spire in presa rispetto alle altre. Calcoli condotti dal MADUSCHKA hanno mostrato (e se n'è avuta conferma sperimentale) che la ripartizione del carico tra le varie spire della filettatura è diversa a seconda che la madrevite è compressa (caso della fig. 17) oppure tesa (caso della fig. 19). I risultati di tali calcoli sono sintetizzati nella Tabella I relativa ad una vite con diametro di filettatura di 1".



figura 19

I valori della tabella valgono nell'ipotesi della perfetta elasticità. Poichè però in pratica nella prima spira si supera il carico di snervamento, si hanno cioè deformazioni superiori a quelle elastiche, essa spira risulta meno caricata di quanto indicato.

Appare dalla tabella stessa che la ripartizione di carico è più uniforme per le viti a filetto triangolare per cui queste vengono preferite nel caso di elevate sollecitazioni unitarie. Il miglior comportamento delle filettatu

TABELLA I

Vite con filetto	Madrevite	N° spire	Carichi sulle varie spire in % del carico totale					
			P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>	P <sub>5</sub>	P <sub>6</sub>
rettangolare	compressa	4	52,3	25,7	13,4	8,6	-	-
		6	52,0	25,0	12,0	5,9	3,1	2,0
		∞	52,0	25,0	11,9	5,8	2,8	1,4
	tesa	6	36,7	18,3	10,2	7,8	9,7	17,3
triangolare	compressa	6	33,9	23,0	15,8	11,3	8,6	7,4
	tesa	6	25,9	18,6	14,4	12,2	13,0	15,5

re triangolari è dovuto al fatto che esistono in esse componenti radiali delle pressioni cui corrispondono deformazioni radiali aventi, a motivo dell'obliquità delle superficie, componenti assiali che alterano l'elasticità virtuale dell'insieme.

Risulta anche dalla tabella che il carico sulle due prime spire non varia apprezzabilmente passando da quattro a sei e addirittura ad un numero infinito di spire in presa. Perciò in pratica è inutile avere più di quattro spire in presa.

Risulta infine come la madrevite tesa sia preferibile a quella compressa ai fini della migliore ripartizione del carico sulle varie spire.

Sono state proposte varie soluzioni per ottenere una equiripartizione del carico fra le varie spire in presa.

Ad esempio dal Maduschka facendo variabile il diametro esterno (fig. 20) della madrevite, senza alterare l'estremità della vite, oppure alleggerendo internamente la

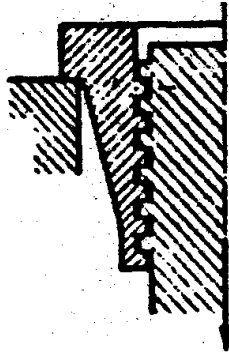


figura 20

estremità della vite secondo un opportuno profilo. Altri sistemi proposti unitamente a quelli ricordati non trovano applicazione per le complicazioni di vario genere cui danno luogo. E' invece talvolta applicata la soluzione proposta dal LEHR di alleggerire il dado (fig. 21) sicchè la

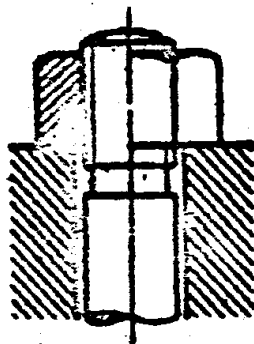


figura 21

concentrazione di tensione nel primo filetto viene impedita dalla presenza di un intaglio di scarico che obbliga il flusso di tensione ad una più uniforme ripartizione fra i filetti. In tal modo la madrevite può passare dallo stato di compressione a quello di tensione. Il suo profilo bene approssima quello (fig. 20) del Maduschka. Si può anche ricorrere ad una rastremazione conica del diametro esterno della vite diminuendo così la deformabilità delle ultime spire rispetto alla prima e quindi producendo un aumento del carico da esse sopportato e cioè ancora una più uniforme ripartizione.

Si mette ancora qui in evidenza la necessità di limitare la pressione sul filetto, di cui è necessaria la verifica specie per viti che devono essere avvitate e svitate più volte e soprattutto per viti di manovra.

Detto pertanto al solito  $Q$  il carico sulla vite,  $n$  il numero di spire attive,  $h$  la sporgenza radiale della parte del filetto su cui ha luogo il contatto,  $d_m$  il suo diametro medio, la pressione suddetta, se la ripartizione del carico sulle varie spire fosse uniforme, sarebbe fornita dalla

$$p = \frac{Q}{n \pi d_m h}$$

Per un impiego razionale della relazione scritta, alla luce della tabella I, deve porsi in essa per  $n$ , a seconda dei casi, un valore da 2 a 4, comunemente 3, anche se il numero di spire attive è maggiore di questi numeri.

Dal ROTSCHER sono consigliati i limiti di pressione, in  $\text{kp/mm}^2$ , di cui alla Tabella II.

Unitamente alla sollecitazione normale va considerata quella di recisione che si manifesta nella sezione del fu



TABELLA II

	Viti avvitate o svitate di rado	Viti di manovra
Acciaio dolce su acciaio dolce o su bronzo .....	3	1
Acciaio temperato su acciaio temperato o su bronzo ....	4	1,3
Ghisa su ghisa .....	1,5	0,5

sto filettato immediatamente dopo il dado. Essa vale

$$\tau = \frac{16 M'}{\pi d_n^3} \quad (49)$$

e, in funzione di  $\sigma_n$ , utilizzando cioè dapprima le (46) e poi la (48),

$$\tau = 2 \frac{d_m}{d_n} \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \sigma_n ,$$

ossia

$$\tau = c \sigma_n \quad (50)$$

una volta che si sia posto

$$c = 2 \frac{d_m}{d_n} \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$$

Il rapporto  $d_m/d_n$  si aggira costantemente sul valore 1,1. Il valore di  $c$  per le filettature unificate oscilla da 0,49 per le filettature fini di grande diametro a 0,56 per quelle grosse di piccolo diametro. Si può dunque mediamente adottare il valore  $c = 0,5$ .

Applicando l'ipotesi dell'energia di distorsione (Hencky - Von Mises) si scriverà, tenendo presente la (50),

$$\sigma_c = \sqrt{\sigma_n^2 + 3\tau^2} = \sigma_n \sqrt{1 + 3 \cdot 0,5^2} = 1,32 \sigma_n. \quad (51)$$

Eseguendo dunque un calcolo a sola trazione devono adottarsi tensioni diminuite secondo il fattore  $1/1,32 = 0,75$ , cioè minori del 25% di quelle ammissibili per trazione semplice.

Sperimentalmente è stato appunto verificato che si raggiunge lo snervamento al serraggio per tensioni pari circa al 75% del limite di snervamento a trazione semplice.

Con riferimento ad esempio al caso d'una vite per cui

$$\alpha = 2,5^\circ$$

$$\theta = 60^\circ$$

$$f = \bar{f} = 0,085$$

ed inoltre

$$d_i = d_n = 2,14 \text{ mm}$$

$$d_e = 2,6 \text{ mm}$$

$$d_m = 2,37 \text{ mm} \quad ;$$

posto inoltre  $\bar{R} = 4 \text{ mm}$ , sarà, per la (41),

$$\varphi' = \text{arctg} f' = \text{arctg} \frac{f}{\cos(\theta/2)} = 6^\circ$$

e, per la (47),

$$Q = \frac{63}{4 \cdot 0,085 + 1,18 \cdot 0,15} = 121 \text{ kp}$$

ove s'è evidentemente posto  $M = 63 \text{ kpmm}$ .

La (48) porge allora

$$\sigma_n = 27,6 \text{ kp/mm}^2 \quad ,$$

mentre la (49), previo impiego della (44) fornisce

$$\tau = 11,3 \text{ kp/mm}^2 \quad .$$

La sollecitazione di confronto secondo Hencky-Von Mises vale

$$\sigma_c = 32,3 \text{ kp/mm}^2 \quad .$$

Per avere dunque un grado di sicurezza dell'ordine di 1,5 occorre realizzare la vite con acciaio avente un limite di snervamento non inferiore a  $48,5 \text{ kp/mm}^2$ .

A riguardo della madre vite occorre evidentemente fare riferimento al carico  $P$  (diretto, si ricordi, lungo  $\underline{k}$ ) fornito dalla

$$P = N \cos \alpha \sin(\theta/2)$$

in precedenza ricavata. Tale carico ripartito lungo l'intero filetto impegnato si comporta alla stregua di una pressione interna.

Orbene, operando sull'ultima relazione scritta come già fatto per la  $F$  nel paragrafo sul procedimento vettoriale di calcolo dei rendimenti, risulterà

$$P = Q \frac{\text{tg}(\theta/2)}{1 - \text{tg} \varphi' \text{tg} \alpha}$$

e, con gli indicati valori di  $\alpha$ ,  $\theta$  e  $\varphi$ ,

$$P \approx 0,68 Q$$

Ora, per il caso d'un dado ordinario, l'altezza  $H$  è all'incirca uguale al diametro esterno di filettatura; allorchè inoltre tale diametro è prossimo al pollice, il passo  $p$  della filettatura potrà porsi pari a  $0,121 d_e$  (uguale a  $0,134 d_m$ , essendo  $d_e = 1,1 d_m$ ). Il numero dei filetti impegnati sarà quindi

$$n = \frac{H}{p} = \frac{d_e}{0,134 d_m} = \frac{1,1 d_m}{0,134 d_m} \approx 8,$$

ed essendo la lunghezza d'impegno  $L$  pari ad  $n \pi d_m$ , si avrà, quale valore  $\bar{Q}$  del carico  $Q$  per unità di lunghezza d'impegno, esprimendo in funzione del prodotto  $d_m \sigma_n$ ,

$$\bar{Q} = \frac{Q}{L} = \frac{\frac{1}{4} \pi d_n^2 \sigma_n}{n \pi d_m} = \frac{0,81}{4n} \frac{d_m^2}{d_m} \sigma_n = 0,025 d_m \sigma_n$$

avendo supposto  $d_n = 0,9 d_m$ .

Inoltre risulterà, analogamente,

$$\bar{P} = \frac{P}{L} = 0,68 \frac{Q}{L} = 0,68 \bar{Q} = 0,017 d_m \sigma_n$$

e, detta  $p'$  la pressione specifica, sarà

$$p' = \frac{P}{\pi d_m H} = \frac{P}{\pi d_m d_e} = \frac{\bar{P} L}{\pi d_m d_e} =$$

$$= \frac{0,017 d_m \sigma_n \cdot \pi n d_m}{\pi d_e d_m} = \frac{0,017 \cdot 8}{1,1} \sigma_n = 0,12 \sigma_n$$

onde con  $\sigma_n = 6 \text{ kp/mm}^2$  si avrà  $p' = 72 \text{ atm}$ , valore assai alto che giustifica il valore  $2d_e$  adottato per il diametro del cerchio inscritto nell'esagono del dado.

## SOLLECITAZIONE DI FLESSIONE

Allorchè nei collegamenti con bullone accade che le superficie delle parti da collegare, per difetto di lavorazione o per irregolarità dello stesso bullone, risultino inclinate rispetto alle superficie della testa e del dado di angoli anche assai piccoli, è messa in pregiudizio la resistenza degli elementi colleganti. Nascono in particolare nel gambo tensioni di flessione che non è consentito di trascurare e la cui entità risulta fra l'altro funzione della inclinazione di ciascuna delle due coppie di facce a contatto.

Riferendosi ad esempio alla fig. 22 relativa a pari inclinazione  $\alpha$  delle due menzionate coppie, la più semplice

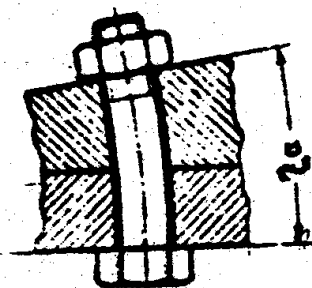


figura 22

ce valutazione del momento flettente  $\bar{M}$  discenderà immediatamente. Se è infatti  $l$  la lunghezza libera del gambo, il raggio dell'arco secondo cui avviene l'inflessione sarà

$$r = \frac{l}{2\alpha}$$

$$\sigma = \frac{\pi}{I} R$$

-216-

$$\sigma = \frac{2 E R}{l} \alpha$$

e quindi ( $\bar{M} = EI/r$ )

$$\bar{M} = \frac{2 EI}{l} \alpha \quad (52)$$

in cui  $E$  è il modulo di elasticità normale ed  $I$  il momento d'inerzia uniforme per tutta la lunghezza  $l$  se si trascura la riduzione del diametro  $d$  del gambo in corrispondenza del tratto filettato.

La (52) e con essa la corrispondente  $\bar{\sigma}_f$ , è indipendente dal carico. Essa fu ricavata dal KAEHLER come caso particolare della sua ipotesi che supposeva nel caso generale agli estremi del gambo condizioni vincolari tali da rendere diverse tra loro le corrispondenti rotazioni che (per organi da collegare nonchè testa e dado assolutamente rigidi) coincidono perfettamente con gli angoli  $\alpha$  e  $\beta$ , tra superficie delle parti da collegare e superficie della testa e del dado.

In una sua nota il MANNA ha fornito una soluzione generale che, tenendo conto delle reazioni complessive dei piani di appoggio sulla testa e sul dado, conduce ad una espressione del momento flettente funzione di tali reazioni.

Per il caso particolare della stessa fig. 22, schematizzato in fig. 23, con un momento  $M$  e una componente assiale  $Q$  delle citate reazioni diretta lungo l'asse in deformato del gambo si avrà, nella generica sezione di ascissa  $x$

$$M_x = M - Qy = -EI \frac{d^2 y}{dx^2},$$

per cui, posto

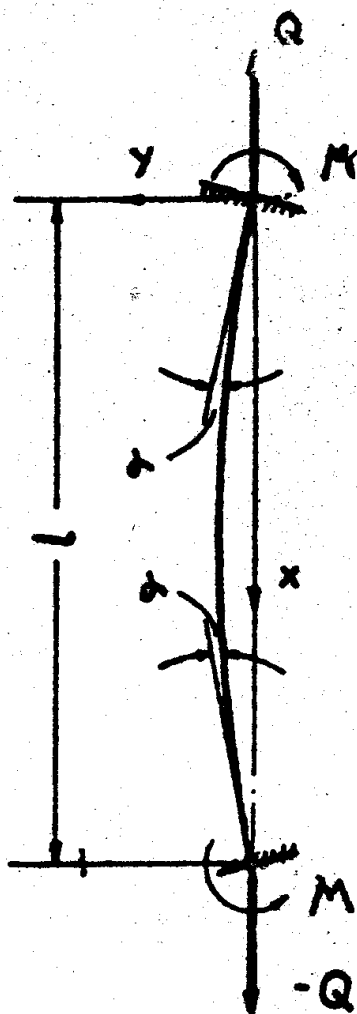


figura 23

$$\omega^2 = \frac{Q}{EI} ; \quad \delta = \frac{M}{Q} \quad (53)$$

ne risulterà l'equazione differenziale

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \omega^2 y + \omega^2 \delta = 0$$



la cui soluzione è

$$y = C_1 \sinh \omega x + C_2 \cosh \omega x + \delta .$$

Quest'ultima, dovendo essere  $y = 0$  per  $x = 0$  ed  $x = l$ , diventa

$$y = \delta \frac{\sinh \omega l - \sinh \omega(l-x) - \sinh \omega x}{\sinh \omega l}$$

cioè

$$\frac{dy}{dx} = \omega \delta \frac{\cosh \omega(l-x) - \cosh \omega x}{\sinh \omega l} . \quad (54)$$

D'altra parte è però

$$\left[ \frac{dy}{dx} \right]_{x=0} = \left[ - \frac{dy}{dx} \right]_{x=l} = \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$$

e quindi la (54) porge, per  $x = 0$  e con impiego della seconda delle (53),

$$\alpha = \omega \frac{M}{Q} \frac{\cosh \omega l - 1}{\sinh \omega l} = \omega \frac{M}{Q} \operatorname{tgh} \left[ \frac{\omega l}{2} \right]$$

e ancora, per la prima delle (53),

$$M = EI \frac{\omega \alpha}{\operatorname{tgh} \left[ \frac{\omega l}{2} \right]}$$

ossia, posto

$$\phi = \frac{\frac{\omega}{2} l}{\operatorname{tgh}(\omega l/2)} \quad (55)$$

$$M = \frac{2EI}{l} \alpha \phi \quad (56)$$

Come si vede la (56) che consente il tracciamento del diagramma di  $M$  - differisce dalla (52) per il fattore  $\phi$  espresso dalla (55) e diagrammato in funzione di  $\omega l$  nel diagramma di fig. 24.

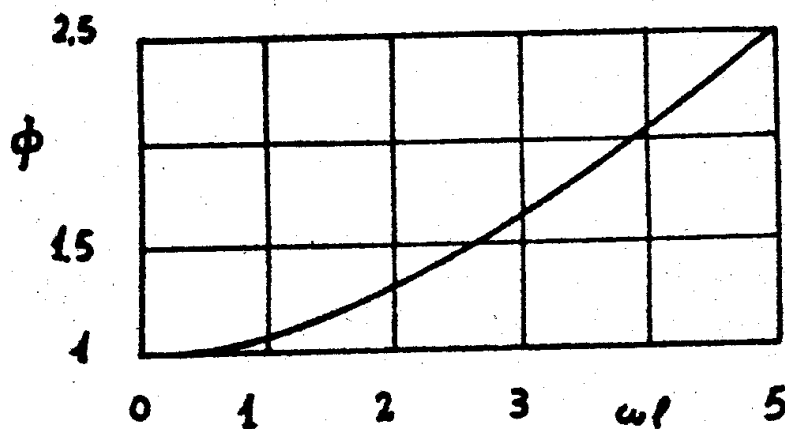


figura 24

Risulta anche, dalla (52), se al solito è  $d_n$  il diametro di nocciolo,

$$\bar{\sigma}_f = \frac{\bar{M}}{I} \frac{d_n}{2} = E\alpha \frac{d_n}{l} \quad .$$

mentre dalla (56),

$$\sigma_f = \frac{M}{I} \frac{d_n}{2} = E \alpha \frac{d_n}{l} \Phi. \quad (57)$$

Il fattore di correzione che affetta l'espressione ora scritta può assumere valori assai elevati come verrà poco oltre evidenziato in un esempio. Si deve tuttavia rilevare che pur con tali valori è possibile evitare fenomeni critici creando un forte giuoco nell'impanatura ottenuto adottando tolleranze di lavorazione piuttosto ampie. Inoltre anche in assenza di queste ultime e sempre che il gambo filettato non sia di materiale molto duro, la rottura viene di solito evitata per l'insorgere in esso gambo di una deformazione permanente.

A titolo d'esempio sia  $\alpha = 1/500$ ,  $d_n = 20$  mm,  $l = 60$  mm,  $E = 2 \cdot 10^4$  kp/mm<sup>2</sup>. In tal caso si ha, per la (57),

$$\sigma_f = \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 20}{60 \cdot 100} \Phi \approx 13 \Phi \frac{\text{kp}}{\text{mm}^2}.$$

D'altronde è, per la prima delle (53),

$$\omega l = l \sqrt{\frac{Q}{EI}} = l \sqrt{\frac{4\sigma_n A}{E A d_n^2}} = \frac{2l}{d_n} \sqrt{\frac{\sigma_n}{E}}$$

avendo indicato con A l'area della sezione retta di diametro  $d_n$ . Con i precisati valori e ancora per  $\sigma_n = 6$  kp/mm<sup>2</sup> la precedente fornisce

$$\omega l = \frac{60}{10} \sqrt{\frac{6}{2 \cdot 10^4}} = 0,06 \sqrt{3} \approx 0,103$$

valore assai piccolo onde potrà porsi  $\phi \approx 1$ . Se invece  $2l/d_n = 200$  si avrà, a pari  $\sigma_n$  ed  $E$ ,  $\omega l \approx 3,5$  ed allora  $\phi \approx 1,7$  il che corrisponde ad un incremento della sollecitazione di flessione del 70%.

Dalla (57) risulta la convenienza di usare piccoli rapporti  $d_n/l$ , cioè viti lunghe e di piccolo diametro. D'altronde s'accresce così anche la elasticità della vite ciò che è favorevole per limitare l'oscillazione del carico sulla vite nel caso di sollecitazioni esterne variabili.

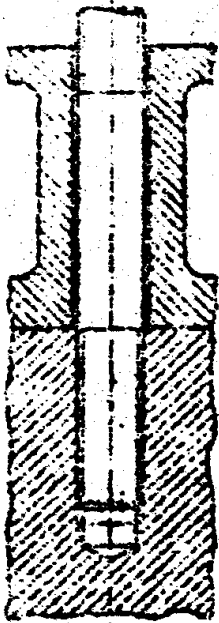


figura 25

Per le viti prigioniere sollecitate a flessione la soluzione corrente di fig. 25 dà luogo facilmente a rotture di fatica nella sezione in corrispondenza al piano di unione delle due parti serrate. Inoltre, se il materiale ove è avvitato il prigioniero è un materiale tenero, quale una lega leggera, il forzamento che si produce, fra la madrevite e la radice in essa avvitata, tende a produrre una deformazione locale sul piano suddetto, per cui può risultare più difficile la tenuta su di esso quando non si usino guarnizioni.

Nella soluzione della fig. 26 si ha un tratto cilindrico calibrato in corrispondenza al piano di divisione ed

un successivo alleggerimento del bullone. In tal modo la sezione di momento massimo non è più indebolita dalla filettatura e il tratto calibrato ha un effetto di incastro che riduce la flessione nella parte filettata; inoltre la maggiore elasticità del gambo ha un benefico effetto, come già ricordato, sulla resistenza a fatica.

Una soluzione migliore della precedente è quella rappresentata in fig. 27, in cui un tratto liscio di diametro

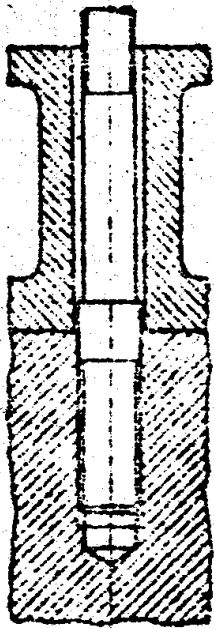


figura 26

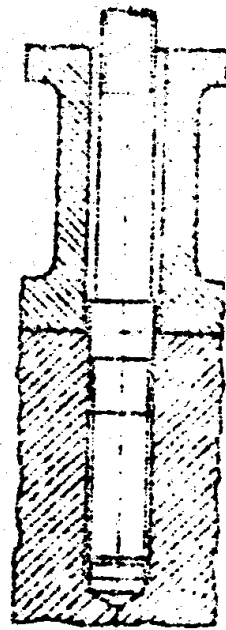


figura 27

minimo poco inferiore a  $d_n$ , lungo non meno di  $0,5 d$  ( $d$  = diametro esterno della filettatura) e con raccordi di raggio  $\geq 0,2d$  alle estremità precede la parte filettata. Tale tratto migliora la distribuzione di tensione nel filetto e nel gambo e facilita l'esecuzione della filettatu

ra e della rettifica del tratto cilindrico. Va notato che la filettatura della madrevite deve prolungarsi all'incirca di una spira entro il raccordo, in modo che certamente la spira più sollecitata della vite sia quella adiacente al raccordo.

Per prigionieri sollecitati solo a trazione (non a flessione) è consigliabile la soluzione di fig. 28 ove il raccordo fra le due parti cilindriche non filettate forma battente di arresto nell'avvitamento.

Esiste un'altra soluzione da raccomandarsi per evitare sovratensioni locali all'inizio della filettatura della madrevite. E' indicata nella fig. 29. Si vede che l'arre-

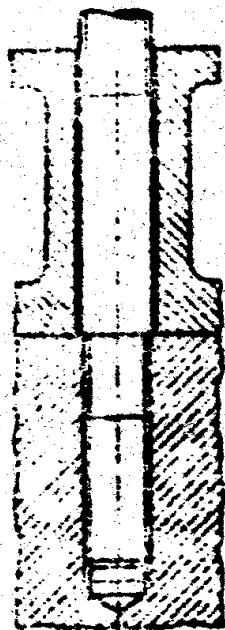


figura 28

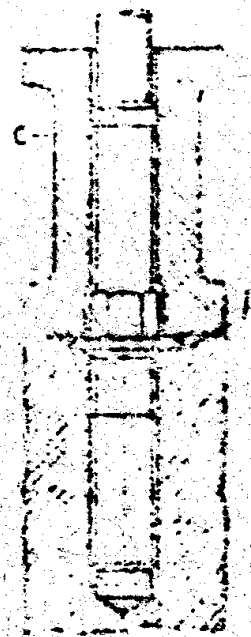


figura 29

sto dell'avvitamento ed un eventuale successivo stato di tensione della radice sono assicurati da un collare ci-

lindrico calibrato A che assicura anche un benefico effetto di incastro contro le sollecitazioni di flessione e contro cui s'arresta la portata prismica B. Il piccolo collare superiore C ha lo scopo d'impedire le vibrazioni flessionali del gambo.

### LA RESISTENZA STATICA DEI COLLEGAMENTI CON VITI

Un esatto proporzionamento di un collegamento con vite dovrebbe avere per scopo il raggiungimento contemporaneo della crisi ovunque: nel fusto, nella filettatura, nella madrevite, nella testa. E' possibile conseguire tale risultato basandosi su indagini sperimentali. Ad alcune di esse si fa ora cenno.

Anzitutto si osservi come l'irrigidimento e la strizione dovute alla presenza del filetto facciamo innalzare, nella trazione di un gambo filettato, la tensione nominale di rottura nella sezione di nocciolo rispetto al carico di rottura del materiale. L'aumento che si realizza in percentuale dipende evidentemente dal modo di ottenimento della vite e dall'eventuale trattamento conseguente: in ogni caso varia dal 5 ad un massimo del 40% per viti rullate senza successiva bonifica. Gli aumenti sono maggiori con filettature a passo grosso.

Per un aumento medio del 15% discende che, affinché parte filettata e parte liscia del fusto abbiano il medesimo carico di rottura complessivo, la sezione della parte liscia, di diametro  $d'$ , deve essere 1,15 volte la sezione di nocciolo di quella filettata, di diametro  $d_n$ , cioè deve essere all'incirca

$$\frac{d'}{d_n} = \sqrt{1,15} = 1,07$$

Per quanto attiene il dado si desidera la rottura della vite prima di quella del filetto. Orbene per dadi normali e carichi di rottura variabili da 42 a 60, regge la relazione sperimentale

$$\frac{h}{d} = 10^{(0,04 d/p - 0,5)} \quad (59)$$

ove  $d$  è il diametro nominale di filettatura e  $p$  il passo, mentre per carichi compresi tra 80 e 90 vale invece la

$$\frac{h}{d} = 0,154 \left[ \frac{d}{p} \right]^{0,38} \quad (60)$$

La (59) e la (60) dicono che il rapporto  $h/d$  cresce col rapporto  $d/p$  che dicesi "finezza della filettatura". Da esse discende che il noto limite (relativo a dadi unificati medi)  $h/d = 0,8$  corrisponde rispettivamente a  $d/p$  pari a 10 e ad 11,3. Per finezze maggiori occorrono dadi più alti di  $0,8d$ . Per dadi più bassi dei valori di  $h$  estraibili dalle (59) e (60) il dado si rompe prima che si raggiunga la sollecitazione di rottura nella sezione della vite, per cui una parte di tale sezione risulta esuberante e può essere alleggerita.

In fig. 30 è riportato un diagramma (di G. HAAS) ottenuto con viti aventi carico di rottura variabile tra 80 e 90 accoppiate a dadi della tabella DIN Kr 751. Le rette di esso, corrispondenti ciascuna ad un valore di  $h/d$ ,



rappresentano colle loro ordinate i rapporti (moltiplicati per cento) fra la tensione nominale nella sezione di nocciolo che si ha alla rottura del dado e il carico di rottura del materiale costituente il bullone in funzion

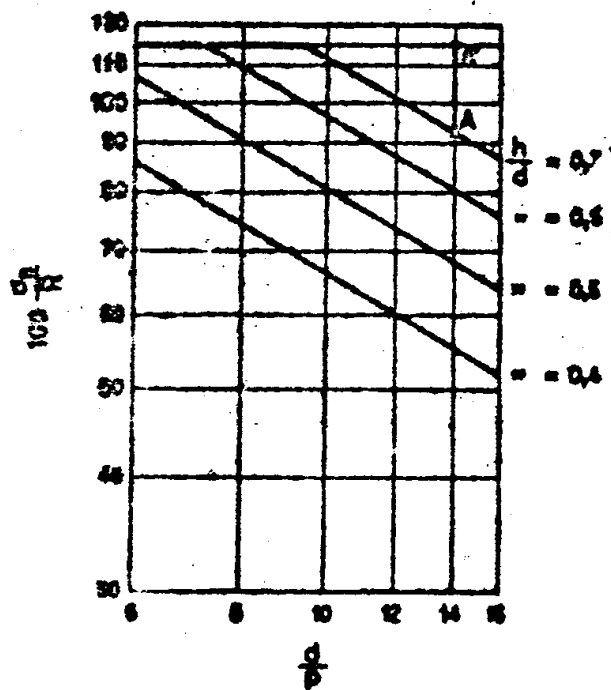


figura 30

ne della finezza  $d/p$  della filettatura. Dal diagramma è facile risalire alla riduzione di sezione di nocciolo cui innanzi s'è fatto cenno.

Dall'esperienza discende anche che la testa di una vite, in una prova di rottura a trazione, si rompe per taglio e che, per utilizzare tutta la resistenza del gambo della vite, è sufficiente un'altezza della testa da 0,4 a 0,43 il suo diametro. Ciò mostra che l'altezza di 0,80

0,7 adottata generalmente nelle unificazioni è eccessiva. Anche per le teste di vite si può ricorrere allo alleggerimento.

Relativamente al filetto può adottarsi, secondo B. HAAS, come tensione nominale critica  $\sigma_c$  (riferita alla sezione di nocciolo), che non deve essere sorpassata perché si ritiene segni la comparsa delle massime deformazioni permanenti ammissibili, quella per la quale la curva tensione-deformazione si scosta dal diagramma rettilineo corrispondente all'elasticità perfetta dell'1% del passo della vite. In tale diagramma la deformazione rappresentata - nel caso del bullone - lo spostamento fra il piano di appoggio del dado e la sezione della vite che si trova in corrispondenza a tale piano a bullone scarico.

Il citato spostamento è somma delle deformazioni del dado e della vite, ma soprattutto del filetto. Prescindendo dalle prime, tale spostamento sarebbe uguale a quello dovuto alle deformazioni di due spire qualunque, una di dado e una di vite, a contatto fra loro. Si può dunque riferire in percentuale tale deformazione alla lunghezza di un passo di filettatura (una spira).

Col criterio esposto, con riferimento a viti aventi carichi di rottura ancora compresi tra 80 e 90 e larghezze di dadi dedotte dalla DIN Kr 751, lo Haas ha costruito il diagramma sperimentale di fig. 31 nel quale, per varie linee corrispondenti ciascuna ad un valore dato di  $h/d$  è indicato, in funzione di  $d/p$ , il rapporto tra  $\sigma_c$  e il carico di snervamento  $\sigma_s$  del materiale.

Come appare dalla figura  $\sigma_c$  può al massimo raggiungere 1,08 del carico di snervamento del materiale costituente la vite. Oltre tale limite il gambo filettato subisce deformazioni unitarie che si scostano più dell'1% dalla retta della perfetta elasticità.

Risulta dal diagramma che l'aumento della finezza del

la filettatura produce un abbassamento tanto più rapido della  $\sigma_c$  quanto più il dado è alto (quanto maggiore è  $h/d$ ); perciò con filettature molto fini serve a poco aumentare l'altezza del dado.

All'eventuale alleggerimento di sezione può pervenirsi tramite il diagramma di fig. 31, analogamente a quanto fatto su quello di fig. 30. Una verifica del genere ha

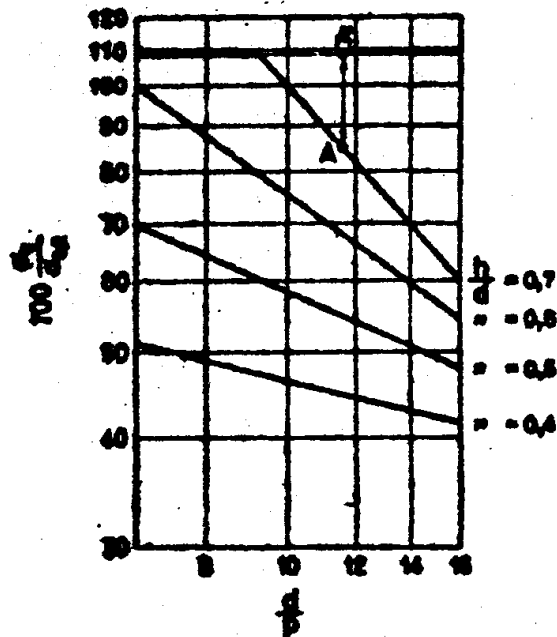


figura 31

importanza anche nel caso di sollecitazioni di fatica dove il superamento del limite indicato dal diagramma porterebbe a deformazioni permanenti tali da allentare il collegamento e condurre alla sua rapida rottura.

## LA FATICA NEI COLLEGAMENTI FILETTATI

La resistenza a fatica dei collegamenti filettati è funzione della loro elasticità nel senso che, a parità di carico esterno applicato, la variazione di carico su di essi (forzati inizialmente in assenza di carico esterno) risulta più piccola ed al limite si annullerebbe per elementi infinitamente meno rigidi delle parti serrate. Va rilevato anche come sia opportuno un sufficiente serraggio iniziale ad evitare che il carico su viti e bulloni cambi segno ed anzi conservi sempre un dato valore anche in segno. Esiste infatti sempre fra viti e madrevite un certo giuoco dovuto alle tolleranze sicchè, qualora non si verifichi quanto detto, si producono urti tra elementi sposi che abbassano notevolmente la resistenza a fatica. Occorre ancora tenere in conto, nella determinazione del serraggio, ogni altra causa che può successivamente abbassarlo, come ad esempio variazioni di temperatura e fenomeni di scorrimento viscoso.

Valori elevati dell'elasticità si conseguono in pratica andando a ridurre la sezione del tratto cilindrico liscio della vite rispetto alla sezione di nocciolo fino ad un rapporto minimo pari a quello delle sollecitazioni unitarie a fatica nella parte filettata ed in quella liscia. Di tal guisa, detti rispettivamente  $\bar{d}$  e  $d_n$  il diametro della sezione corrispondente al tratto liscio e quello della sezione di nocciolo, risulta

$$0,45 \leq \frac{\bar{d}}{d_n} \leq 0,7$$

Conviene però non scendere al disotto di 0,6 ad evitare che la sezione ridotta non sopporti un sufficiente pre-carico.

Il diagramma di Goodman di un elemento filettato presenta i due lati superiore ed inferiore quasi paralleli alla retta a  $45^\circ$  per l'origine il che indica una variazione assai piccola dell'ampiezza dell'oscillazione della tensione sovrapposta alla tensione media  $\sigma_m$ . Se ne deduce che la conoscenza del citato valore all'incirca costante di  $\Delta\sigma$  e del carico di snervamento è sufficiente per un tracciamento approssimato del diagramma. In virtù di quanto detto si suole spesso riportare, dei valori sperimentali, soltanto il  $\Delta\sigma$ , con o senza il corrispondente valore della  $\sigma_m$ .

Il WIEGAND eseguì numerose prove onde evidenziare l'effetto della forma della madre vite sulla resistenza a fatica. Esse furono condotte a precarico costante  $\sigma_m = 20$   $\text{kp/mm}^2$  su viti di  $3/4''$  in acciaio ordinario con carico di rottura statico pari a  $40$   $\text{kp/mm}^2$ . La figura 32 è relativa ai casi oggetto di sperimentazione: dado norma

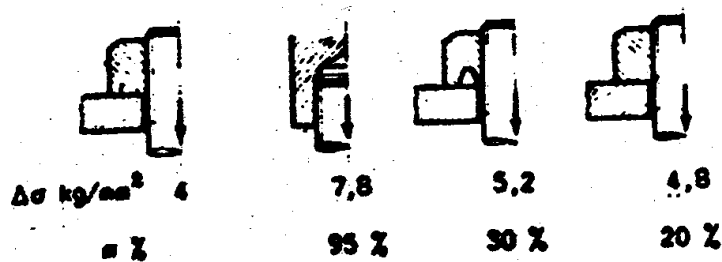


figura 32

le unificato, vite mordente con madre vite di trazione; dado di Lehr (di cui alla fig. 21), dado tornito conicamente onde trasferire un carico maggiore sulle ultime spire e scaricare le prime. Oltre ai  $\Delta\sigma$  sono riportati

tati, per i tre ultimi casi, i guadagni percentuali rispetto al primo caso che è il più sfavorevole.

Si osservi che un basso modulo di elasticità (ghisa, leghe leggere) del materiale costituente il dado, dal momento che migliora la ripartizione del carico sulle varie spire, consente un aumento del  $\Delta\sigma$ . E' risultato, ad esempio, che esso s'incrementa del 30% passando dall'acciaio alla ghisa e del 20% passando dall'acciaio ad una lega di Al.

Va altresì notato che l'effetto d'intaglio e la maggior sensibilità all'intaglio per gli acciai con carichi di rottura più elevati rendono minimo il guadagno di resistenza a fatica ottenibile coll'impiego di acciai legati ad alto carico di rottura in confronto degli acciai comuni; sicchè si giustifica talvolta l'uso d'acciai ad alto carico di snervamento non perchè con essi siano più alti i  $\Delta\sigma$ , ma soltanto perchè le viti costruite in tali acciai possono meglio sopportare il necessario precarico di serraggio e le sollecitazioni di torsione ad esso collegate.

Resta infine da dire che c'è un'incidenza notevole dovuta al modo di costruzione della filettatura. Le sperimentazioni hanno evidenziato che le filettature tagliate e quelle rullate, non sottoposte a successivo trattamento termico, si comportano in modo praticamente equivalente, e che il trattamento termico successivo fa sempre abbassare la resistenza a fatica, specie nelle viti rullate, dove esso distrugge l'effetto benefico dell'incrudimento superficiale. Si è visto anche che i  $\Delta\sigma$  possono eccezionalmente incrementarsi attraverso la rullatura del fondo gola della filettatura. Tali aumenti possono persino superare il 100%.

La Tabella III, compilata sulle esperienze di Wiegand e Haas su viti passanti, senza serraggio di parti intermedie, riporta il diametro nominale  $d$  di filettatura, il

TABELLA III

d	Materiale	$\sigma_R$	Procedimento di costruzione	$\Delta\sigma$
1/2"	St 38, 13	45	Tagliata	7,5
8 mm	St 35, 61	60	Rullata	7,5
8 mm	VCMo 125	100	Bonificata e tagliata	10,0
8 mm	VCMo 135	110	Bonificata e rullata	6,5
8 mm	Acciaio al Cr, Mo, V	110	Bonificata e rettificata o rullata	14,0
8 mm	Acciaio al Cr, Mo, V	110	Bonificata, rullata e rullata a fondo gola	6,3
8 mm	Acciaio al Cr, Mo, V	110	Tagliata e bonificata	8,0
8 mm	Acciaio al Cr, Mo, V	110	Bonificata e rullata	5,0
8 mm	Acciaio al Cr, Mo, V	110	Rullata e bonificata	7,0
8 mm	Acciaio al Cr, Mo, V	110	Bonificata e rettificata	8,0
8 mm	Acciaio al Cr, Mo, V	110	Bonificata e tagliata	17,0
8 mm	Acciaio al Cr, Mo, V	110	Bonificata, rettificata e rullata a fondo gola	6,0
8 mm	Acciaio al Cr, Mo, V	110	Bonificata e rullata	5,5
8 mm	Acciaio al Cr, Mo, V	110	Bonificata e tagliata	6,5
8 mm	Acciaio al Cr, Mo, V	110	Bonificata, tagliata e rullata	8,5
8 mm	Acciaio al Cr, Mo, V	110	Bonificata e tagliata	7,7
8 mm	Acciaio al Cr, Mo, V	110	Bonificata e rullata	9,0
8 mm	Acciaio al Cr, Mo, V	110	Bonificata, tagliata e rullata	

materiale (acciai tedeschi unificati), il suo carico di rottura statico  $\sigma_s$ , il procedimento di costruzione della filettatura e il  $\Delta\sigma$  in  $\text{kp}/\text{mm}^2$  ottenuto per tensioni medie di precarico dai 10 ai  $35 \text{ kp}/\text{mm}^2$ .

### CALCOLI RELATIVI AI COLLEGAMENTI FILETTATI

I carichi, massimo e minimo, che si raggiungono nel funzionamento, dipendono, come s'è visto nello studio dei triangoli di deformazione, dall'elasticità dei vari elementi del collegamento e quindi dalle dimensioni che si ricercano. In un calcolo esatto bisogna quindi procedere per tentativi, assumendo un valore approssimato per il carico, risalendo con esso a delle dimensioni, indi verificando il valore del carico assunto e così di seguito.

Va notato inoltre che dovendosi in genere eseguire per uno stesso collegamento diversi calcoli, saranno assunte per buone le dimensioni massime risultanti.

Si procede dapprima al calcolo a trazione, statica o a fatica, con riferimento al carico massimo  $Q$  inizialmente assunto. Sicchè in condizioni di crisi si scriverebbe ( $\sigma_R$  = tensione di rottura)

$$\sigma_R \frac{\pi d_n^2}{4} = Q$$

con  $d_n$  diametro di nocciolo.

La precedente relazione, assumendo un coefficiente di sicurezza  $a$  e tenendo presente, tramite la (51), l'effetto di torsione, diventa



$$\frac{\sigma_R}{1,3 a} \frac{\pi d_n^2}{4} = Q ;$$

infine, se  $m$  è l'aumento percentuale di resistenza dovuto alla presenza del filetto e definito nel paragrafo della resistenza statica, si scrive

$$\frac{(1 + m)}{1,3 a} \sigma_R \frac{\pi d_n^2}{4} = Q .$$

Analogamente, per garantirsi contro lo snervamento della vite e il conseguente allentamento del serraggio, dovrà essere

$$(1 + m') \sigma_s \frac{\pi d_n^2}{4} \leq Q$$

*mag 430 dell'*

nella quale  $\sigma_s$  è il carico di snervamento del materiale e  $(1 + m')$  il limite della  $\sigma$  nel nocciolo oltre il quale si hanno (v. fig. 31) deformazioni permanenti eccessive:

La scelta del materiale del dado consentirà di fissare l'altezza del dado attraverso i diagrammi di fig. 30 e 31. Tale scelta verrà fatta cercando di raggiungere le rette orizzontali che limitano superiormente i diagrammi stessi.

Nel gambo liscio la sezione minima verificherà le seguenti ovvie disequaglianze

$$\frac{\sigma_R}{a} \frac{\pi \bar{d}^2}{4} \geq Q$$

$$\frac{\sigma_s}{a'} \frac{\pi \bar{d}^2}{4} \geq Q$$

che esprimono rispettivamente la stabilità alla rottura e la sicurezza contro lo snervamento (con coefficiente  $a'$ ) e nelle quali  $\bar{d}$  è evidentemente il diametro della sezione del gambo.

Eseguito il dimensionamento del collegamento si potranno calcolare le costanti elastiche e quindi verificare (v. triangoli di deformazione) se il carico massimo presunto all'inizio corrisponde a quello derivante dal carico esterno e dal forzamento iniziale. Se si trovasse un carico maggiore di quello presunto occorrerebbe aumentare le dimensioni del gambo della vite, oppure scegliere un materiale con resistenza maggiore e ripetere il calcolo.

Per quanto riguarda il calcolo a fatica, si valuterà dapprima approssimativamente l'oscillazione  $\pm \Delta Q$  del carico nella vite dovuto alla variazione del carico esterno, e si verificherà che la corrispondente oscillazione di tensione  $\pm \Delta \sigma_s$  nella sezione di nocciolo sia una certa funzione del  $\Delta \sigma$  ammissibile in quel caso (v. figura 32 e tab. III). Si ridurrà quindi, come in precedenza accennato, la sezione del tratto di gambo liscio per avere la massima elasticità possibile. Si calcoleranno quindi la costante elastica della vite, il valore esatto di  $\Delta Q$  e si verificherà nuovamente, modificandola se necessario, la sezione di nocciolo. Le verifiche per le deformazioni permanenti del fusto della vite e della filettatura restano le stesse del calcolo statico precedente; si deve solo ricordare che adesso vanno applicate al carico massimo raggiunto.

Calcoli o ens in  $H = a' \frac{\pi \bar{d}^2}{4} \sigma \frac{D_m}{2}$

## CENNI SULL' EFFETTO D'INTAGLIO NEGLI ELEMENTI FILETTATI

I fattori di forma  $\alpha$  raggiungono i loro massimi sulla superficie esterna della vite, in corrispondenza delle gole dei filetti, dove è massimo l'effetto di flessione del filetto e l'effetto di contrazione radiale impedita dovuto al filetto stesso. Se ne deduce che la zona più pericolosa, da cui s'inizia in genere la rottura per fatica, è, come l'esperienza conferma, il fondo della gola della prima spira in presa, ove contemporaneamente sono massimi sforzo di trazione, momento torcente, momento flettente e carico per unità di lunghezza sulla spira. In proposito la MPA di Darmstadt ha eseguito delle prove nelle quali il 65% delle rotture si è manifestato in corrispondenza del primo filetto portante (il 20% si verifica invece nella sezione di passaggio tra filettatura e gambo liscio, mentre il 15% interessa la sezione di raccordo tra gambo e testa della vite). La fig. 33 mostra la rottura a fatica di una vite in corrispondenza della prima sezione di gola. La superficie D palesa una struttu

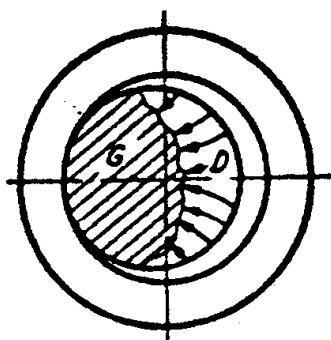


figura 33

ra a grano fine che confina con la struttura grossolana e accidentata della rottura di schianto G. La rimanente superficie di rottura, abbastanza estesa, sta a dimostrare la presenza di una elevata tensione nominale. La dissimmetria della superficie di rottura è evidentemente da attribuirsi al fatto che il carico applicato non è mai di sola trazione.

Si accenna qui di seguito ad alcuni dei sistemi per combattere la concentrazione di tensione suddetta.

E' possibile aumentare il raggio di gola al fondo del filetto; può conseguirsi tale risultato senza ridurre il diametro di nocciolo, ma riducendo la superficie utile del filetto. Un profilo del genere è quello Storz che appare a sinistra in fig. 34 accanto al profilo unificato corrispondente rispetto al quale presenta raggio di gola triplo.



figura 34

Conviene anche lasciare sporgere qualche spira della madre vite prima dell'inizio della filettatura della vite, come in fig. 35. In tal modo la prima spira, che è come si sa la più sollecitata, viene posta parzialmente in ombra rispetto al flusso di tensione, ed inoltre l'effetto d'intaglio per la sollecitazione di flessione del filetto nella gola della prima spira è minore perchè in tale gola

si ha l'ampio raccordo col gambo liscio in luogo d'e piccolo raccordo a fondo gola fra spira e spira.

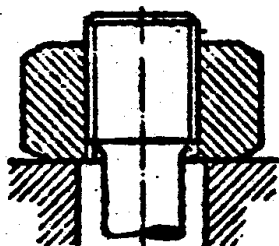


figura 35

Nel caso di viti mordenti (fig. 36) è opportuno lasciare sporgere dalla madrevite una lunghezza filettata di al meno un diametro. Questo per evitare nella prima spi-

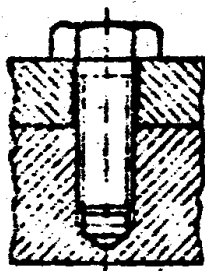


figura 36

ra un'ulteriore concentrazione di tensione per l'esistenza, in corrispondenza o almeno in prossimità di essa; della discontinuità nel passaggio dalla parte filettata a

quella non filettata.

Si osservi come sia anche necessario ridurre l'effetto d'intaglio fra fusto e parte filettata prodotto dalla gola di scarico per l'utensile che taglia la filettatura (figura 37) o facendo conico il passaggio dal fusto alla parte filettata (fig. 38) o dando adeguata lunghezza alla gola di scarico (fig. 39).



figura 37



figura 38

Si consiglia di ridurre a  $15^{\circ}$  l'angolo (di  $30^{\circ}$ ) d'inizio (fig. 40) delle filettature unificate normali fatte con madrevite.

E' necessario premunirsi anche dall'effetto d'intaglio nel raccordo fra testa e fusto. Il raccordo a semplice arco di circonferenza dà luogo a fattori di forma elevati in corrispondenza al punto d'inizio del raccordo. La soluzione migliore, che avvicina  $\alpha_i$  ad 1 è quella di figura 41, a destra o a sinistra, di raccordo fatto con due archi di cerchio, di cui il primo con raggio assai maggiore del secondo. Per avere un piccolo  $\alpha_i$  è neces

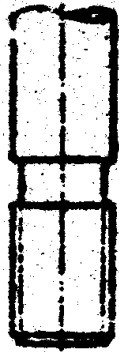


figura 39

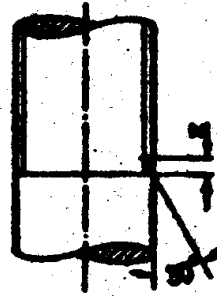


figura 40

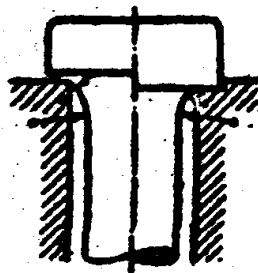


figura 41

sario che sia grande proprio il primo raggio di curvatura. Sono adottabili anche raccordi ad arco di parabola, facilmente determinabili una volta fissati i punti di

inizio e di termine e le tangenti in essi.

Altre semplici soluzioni sono riportate nelle figg. 42 e 43, ove opportuni intagli di scarico deviano il flusso di tensione dal punto pericoloso.

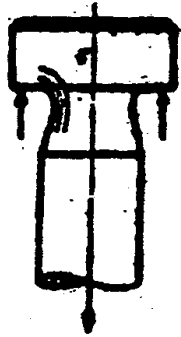


figura 42



figura 43

La Tabella IV dà un'idea degli effetti d'intaglio nelle filettature a confronto delle provette lisce. Essa riassume le prove a trazione-compressione di MOORE e di HENWOOD. Si vede al solito che la sensibilità all'intaglio è maggiore per gli acciai con carico di rottura più elevato e inoltre che la filettatura Whitworth è superiore, dal punto di vista della fatica, alla filettatura metrica. Ciò è dovuto ai raccordi di gola il cui raggio influisce sensibilmente sulla resistenza a fatica, e che nella filettatura metrica o mancano o sono necessariamente meno ampi, per essere l'altezza complessiva degli smussi del triangolo generatore pari a solo  $1/8$  dell'altezza di tale triangolo anziché a  $1/6$  come nella filet-



tatura Whitworth.

TABELLA IV

	Acciaio al C $\sigma_R = 20$		Acciaio SAF 2320 $\sigma_R = 7$	
	$\sigma_R$	$S_i$	$\sigma_R$	$S_i$
Provetta liscia .....	26	1	51	1
Filettatura Whitworth .....	14,8	1,76	15,4	3,3
Filettatura metrica .....	9,1	2,86	12,6	4,05