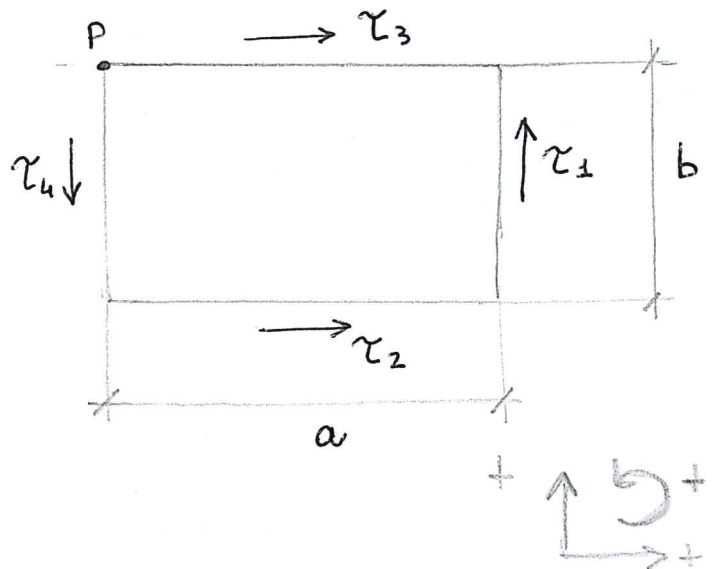
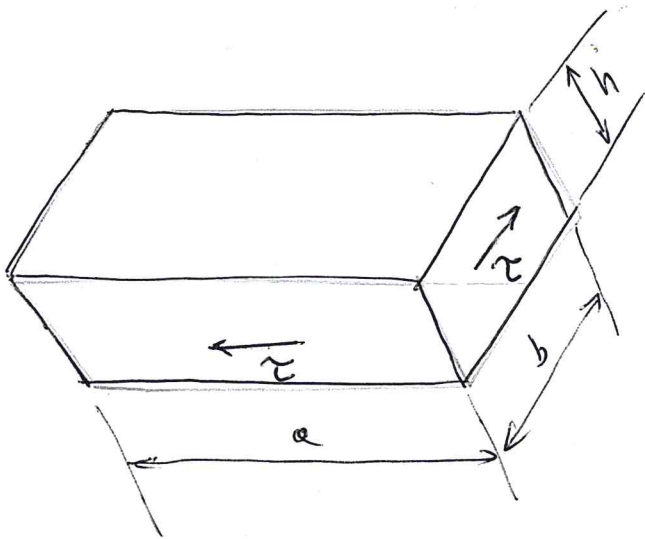


1) TRAVE ARROCCCIATA (CONSIDERATA EMOSSITO)

2) Simmetria delle tensioni tangenziali

Prendiamo in considerazione un elementino:



h = altezza

Dobbiamo imporre l'equilibrio delle forze e dei momenti. Per quanto riguarda l'equilibrio delle forze dobbiamo imporre sia quello orizzontale sia quello verticale:

$$\tau_1 * b * h - \tau_4 * b * h = 0 \Rightarrow \tau_1 = \tau_4$$

$$\tau_2 * a * h + \tau_3 * a * h = 0 \Rightarrow \tau_2 = -\tau_3$$

Prendiamo come polo un vertice (P) in modo da annullare alcune forze che non hanno braccio (τ_3 e τ_4):

$$\tau_1 * b * h * a + \tau_2 * a * h * b = 0 \Rightarrow \tau_1 = -\tau_2$$

Le quattro tensioni tangenziali sono tutte uguali tra di loro e hanno il solito verso: testa contro testa e coda contro coda.

$$\tau_1 = -\tau_2 = \tau_3 = \tau_4$$

3) Cerchi di Mohr

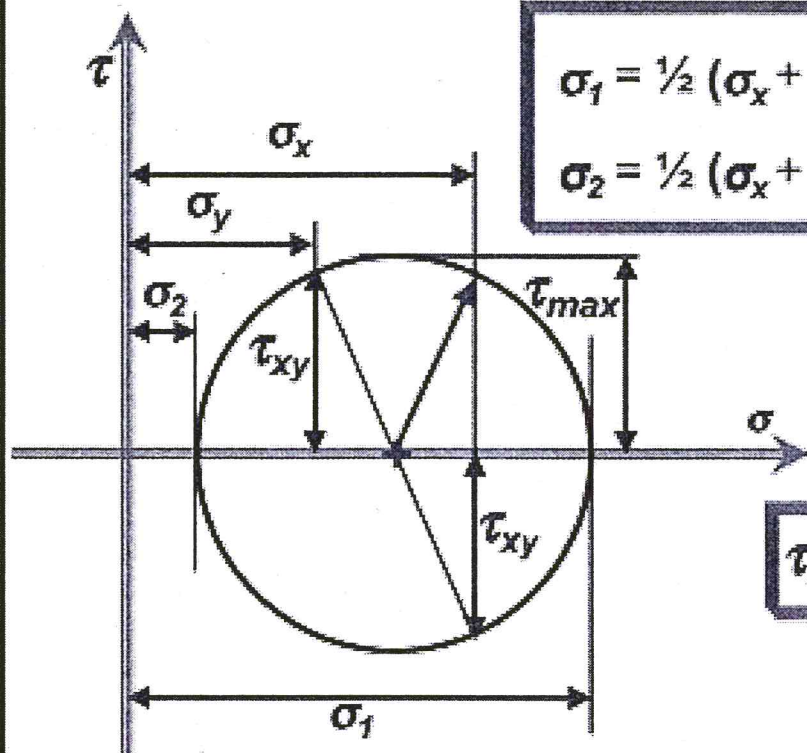
Il cerchio di Mohr è una rappresentazione grafica dello stato piano di tensione interna in un punto, proposta dall'ingegnere tedesco nel 1892. La rappresentazione è costruita riportando su un opportuno piano σ, τ (il piano di Mohr), le componenti normali e tangenziali dello stato di tensione su un generica giacitura passante per il punto. Se sul piano σ, τ si rappresentano, con opportune convenzioni, le tensioni agenti su tutte le giaciture di un certo fascio, i punti rappresentativi giacciono su archi di circonferenza. Molto utili risultano i cosiddetti cerchi principali di Mohr, ovvero i cerchi di Mohr per fasci di giaciture aventi per sostegno una direzione principale di tensione. Le convenzioni fondamentali che vengono adottate sono due; la prima è che le σ di trazione sono positive mentre quelle di compressione negative, la seconda invece stabilisce che le τ che inducono una rotazione oraria del cubetto sono positive. Stabilite tali convenzioni possiamo ricercare, posto che l'asse z sia una direzione principale e che siano note $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, le tensioni principali su un Cerchio principale di Mohr:

Il cerchio di Mohr

Le tensioni principali possono essere ricavate geometricamente dal cerchio di Mohr se sono note le componenti di tensione nel sistema xy :

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{\left\{ \left[\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \right]^2 + \tau_{xy}^2 \right\}}$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) - \sqrt{\left\{ \left[\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \right]^2 + \tau_{xy}^2 \right\}}$$



e il massimo valore del taglio è dato da:

$$\tau_{max} = \sqrt{\left\{ \left[\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \right]^2 + \tau_{xy}^2 \right\}}$$

$$\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_2) / 2$$

- Criterio della massima tensione normale (Rankine)
- Criterio della massima deformazione
- Criterio energetico (Beltrami e Heuley von-Mises) $\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3}$
- Criterio di curva cubica (Coulomb)

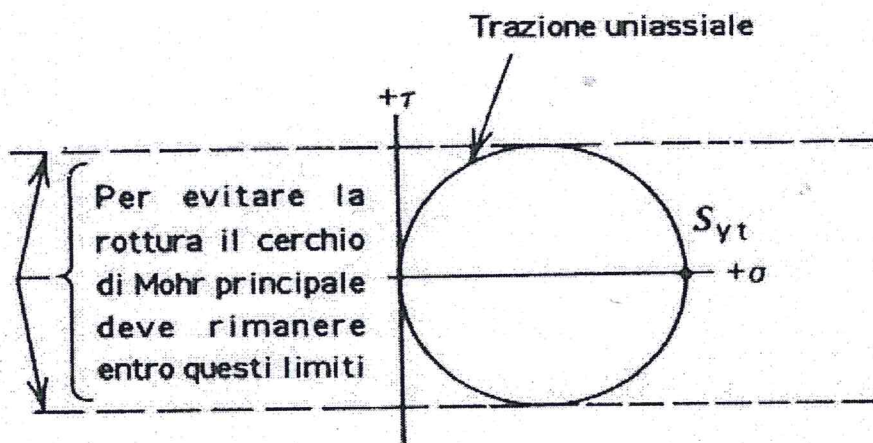
- 4) Criterio della massima tensione tangenziale (Tresca)

Il criterio della tensione tangenziale massima fu originariamente proposto da Coulomb (1773) e successivamente (1868) da Tresca, esso ipotizza che il cedimento (per snervamento) si verifica quando la massima tensione tangenziale nel punto considerato raggiunge o supera la massima tensione tangenziale che provoca l'inizio dello snervamento in un provino dello stesso materiale soggetto ad una prova di trazione semplice.

Tale criterio mi dice che si giunge a rottura quando:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_R}{2}$$

Graficamente possiamo dire che i cerchi di Mohr possono "dilatarsi" fino però ad una retta limite (parallela all'asse σ) che mi rappresenta la massima tensione tangenziale.



5) Classificazione delle prove

Il fenomeno della fatica consiste nella rottura dei pezzi sottoposti a sollecitazioni cicliche, anche se in nessun momento del ciclo si è raggiunta la tensione di rottura. Tra le varie prove di fatica distinguiamo:

- **Prove statiche:** sono quelle in cui il carico aumenta gradualmente con bassa velocità (circa un $\text{Mpa} \cdot \text{s}^{-1}$) fino a rottura. Ad esempio nella prova di trazione possiamo notare che la forza applicata aumenta lentamente, così lentamente che possiamo ritenere, in tutti i punti, che σ sia uguale
- **Prove dinamiche:** sono quelle prove in cui l'aumento del carico è molto veloce (circa $10^5 \text{ Mpa} \cdot \text{s}^{-1}$), sono ad esempio prove dinamiche le prove di resilienza

Fatica: intendiamo per fatica una sollecitazione variabile nel tempo con legge regolare.

c'è un'alternanza delle tensioni in funzione del tempo

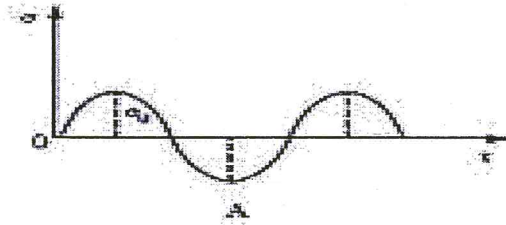


- **Prove di fatica:** sono quelle in cui il carico, variando con velocità medio-alta (circa $10^3 \text{ Mpa} \cdot \text{s}^{-1}$) ha un andamento oscillante tra un massimo e un minimo

In base ai valori del carico massimo, quello minimo, quello medio, dell'ampiezza dell'onda di tensione e del rapporto di tensione, possiamo distinguere le prove in:

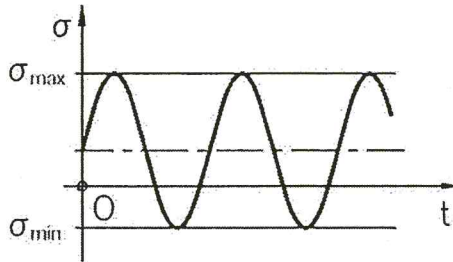
- **Alternò simmetriche:** se $\sigma_{\min} = -\sigma_{\max}$ e quindi $\sigma_m = 0$ ed $R = -1$ (sono le prove più comuni)

$R =$ rapporto di carico
 $\sigma_{\min} / \sigma_{\max}$

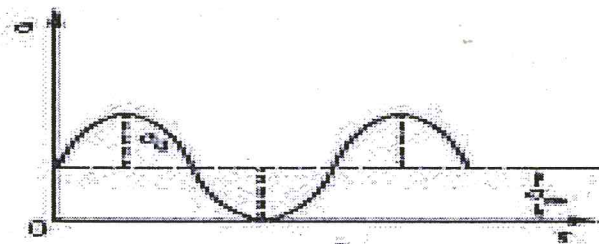


- **Alternò asimmetriche:** se $\sigma_{\min} \neq -\sigma_{\max}$; in questo caso si ha $-1 < R < 0$ se il carico prevalente è di trazione e $R < -1$ se il carico prevalente è di compressione (tali prove sono poco usate)

C'è cambiamento di segno durante il ciclo ma il valore assoluto del minimo è diverso da quello del massimo



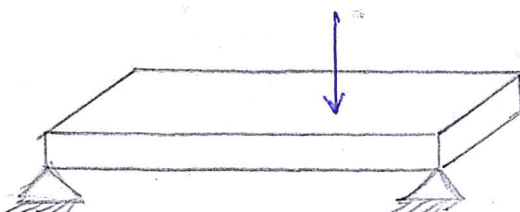
- **Dallo zero:** se $\sigma_{\min} = 0$ e quindi $R=0$ (posò usato il caso a compressione $\sigma_{\max} = 0, R=\infty$)



- **Pulsante:** se σ_{\min} e σ_{\max} hanno lo stesso segno (quasi sempre si effettuano prove in trazione per cui essi sono positivi); si ha $0 < R < 1$ se sono di trazione e $R > 1$ se sono di compressione

Possiamo fare un'ulteriore distinzione delle prove in base al tipo di sollecitazione:

- **Trazione-compressione:** utilizza una macchina di prova "trazione-compressione" per tirare e/o comprimere il provino ad un certo valore della frequenza (3 Hz)
- **Flessione Statica (alternata):** si applica un carico concentrato alternato, fin quando il provino non giunge a rottura. Con l'esecuzione di tale prova possiamo ottenere il numero dei cicli successivi affinché il provino non si rompa. (Esistono anche casi in cui il numero di alternanze è infinito)

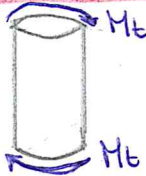


numero di cicli a rottura



il provino si riflette e ruota riflesso; il risultato della prova è successivamente il numero di cicli a rottura

- **Flessione rotante:** in questa prova viene utilizzato un provino circolare che viene appoggiato su dei cuscinetti e successivamente sottoposto all'applicazione di un carico. Essendo il provino circolare quando flette ruota. È interessante poiché risulta pratica e veloce ed ha bisogno di un semplice asse in rotazione, mosso da un motore elettrico, di sicuro la più diffusa.
- **Torsione alternata**



6) Parametri σ_{max} σ_{min} R

Per caratterizzare un carico di fatica occorre indicare il carico massimo, quello minimo e il numero di alternanze. Ragionando in termini di tensione (quella nominale, ossia non si tiene conto dell'effetto di intaglio né tanto meno della contrazione laterale), si possono assegnare due dei seguenti cinque parametri:

1. Il carico massimo σ_{max}
2. Il carico minimo σ_{min}
3. Il valor medio σ_m (che viene fornito in quanto non conta la forma dell'onda, o meglio, per la forma sinusoidale la sua espressione mi dà la media esatta)
4. L'ampiezza σ_a dell'onda di tensione
5. Il rapporto di tensione R

Dove:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$$

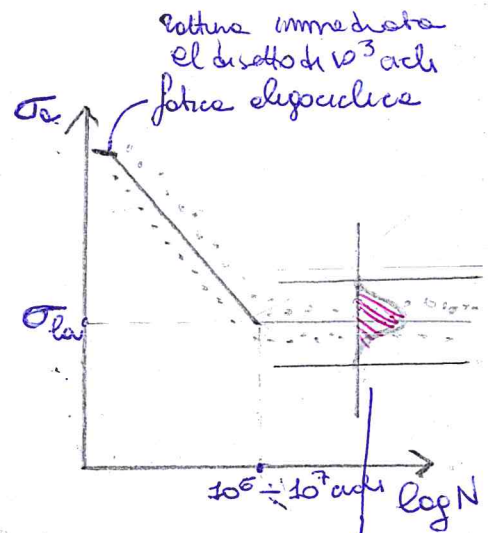
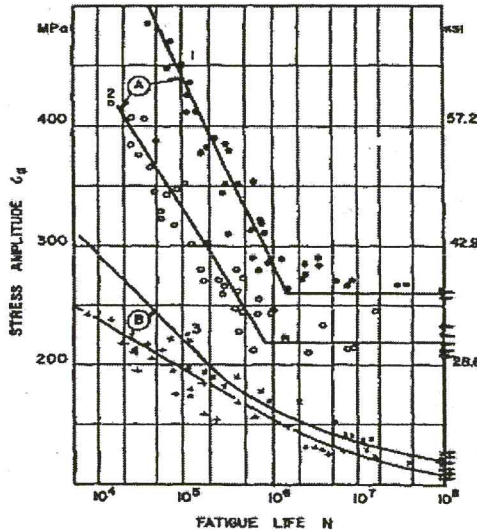
$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$$

7) Diagramma di Wohler

Il comportamento a fatica può essere riassunto nel diagramma del Wohler che porta in ascissa il logaritmo del numero dei cicli a rottura e in ordinata il logaritmo della σ_a . ogni diagramma è tracciato per un valore particolare di σ_m ma in pratica quello più usato è quello con $\sigma_m=0$. Ogni punto del diagramma rappresenta un provino. I punti si trovano sparpagliati su due fasce, una decrescente e l'altra orizzontale posta sul proseguimento della prima per alti valori del numero dei cicli. La notevole dispersione è dovuta al fatto che la fase di nucleazione della cricca dipende da molti fattori, oltre che dal carico; la fase di propagazione è assai più deterministica ma incide poco sulla durata totale. Con

metodi statistici si tracciano sul diagramma due linee, una inclinata e l'altra orizzontale, corrispondenti alla mediana delle due fasce; la prima è relativa alla vita a resistenza finita e la seconda alla resistenza a fatica infinita (limite di fatica). Talvolta si traccia anche una terza retta per valori bassi del numero dei cicli, corrispondente alla fatica oligociclica. L'ordinata della retta orizzontale viene detta limite di fatica indicato con σ_L (σ_m). Se $\sigma_m=0$ il limite si indica con σ_{La} . Per alcuni materiali, in particolare per la leghe leggere (leghe di alluminio), il limite di fatica è molto basso e viene raggiunto per valori altissimi di N (10^8-10^9).

σ_{La} = limite di fatica alterno o alternosimmetrico



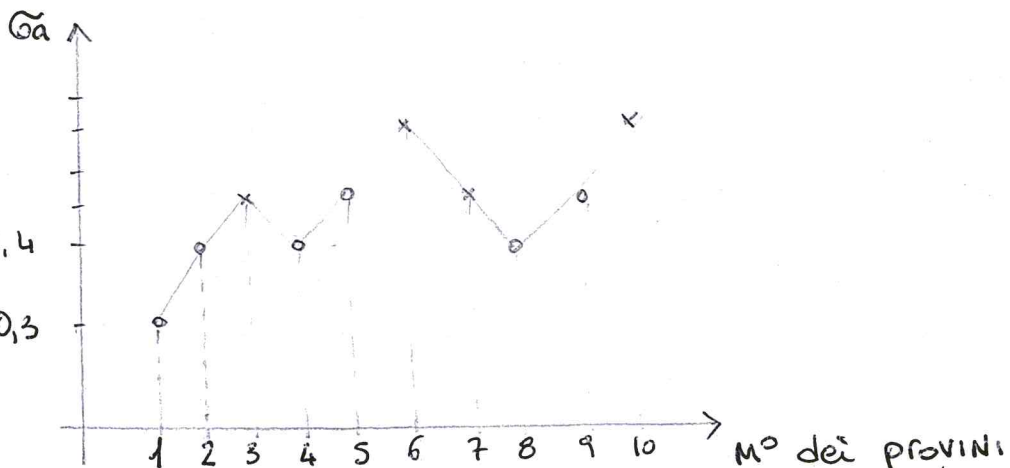
La distribuzione si considera gaussiana, cioè in generale i provini si rompono in corrispondenza di quella linea media

Come si fa a trovare quel valore medio senza fare prove? →

8) Metodo Stair-case

Il metodo stair-case è uno dei metodi classici per la determinazione del limite di fatica ad un prefissato numero N_i di cicli. Esso prevede che i pezzi siano provati sequenzialmente uno per volta. Il primo provino viene sottoposto ad un livello di sforzo pari al limite di fatica stimato: se il provino cede quello seguente viene provato ad un livello di sforzo più basso. Se il primo provino sopravvive ad un numero N_i di cicli, la prova viene interrotta e il provino successivo viene provato ad un livello di sforzo più alto. La procedura continua in questo modo fino a provare almeno 15 provini.

Se il materiale è un acciaio, di cui conosciamo la tendenza di rottura, possiamo immaginare che l'esperto della gamma sia $\pm 1/10$ della σ_a .



* per esempio 10^6 (valore critico)
La rottura immediata è quella che si ha al di sotto di 10^3
... - la rottura è detta OLIGOCICLICA

Da questa tabella, con una certa formula, si riesce a trovare il valore della linea centrale, cioè della linea media.



σ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	☒	○
650				☒												1	-
600	☒		○		☒											2	1
550		○				☒										1	1
500							☒		☒						☒	3	-
450								○		☒		☒		○		2	2
400											○		○			-	2
TOT																9	6

9) Diagramma di Haigh-Soderberg

Il diagramma di σ_m in funzione di σ_m si chiama diagramma di Haigh-Soderberg. Esso si presenta con la concavità rivolta verso il basso. Nel primo quadrante si approssima con una retta passante per i punti $A(0, \sigma_c)$ ed $R(\sigma_R, 0)$. La costruzione del diagramma di Haigh-Soderberg si ottiene a partire da una serie di diagrammi del Wohler, ottenuti a diversi valori del precarico, la costruzione è mostrata in figura 55. Nella successiva figura, 56, si vede il passaggio dai punti sperimentali, dove ciascuno rappresenta il limite di fatica per un diagramma del Wohler, ad una serie di curve approssimanti. Quella che noi usiamo è la retta indicata con il numero 1, ossia la retta di Goodman. In tale diagramma si rappresenta un carico di fatica mediante un punto; se questo cade al di sotto della linea di resistenza a fatica vuol dire che l'organo sottoposto a quel carico non si rompe per fatica.

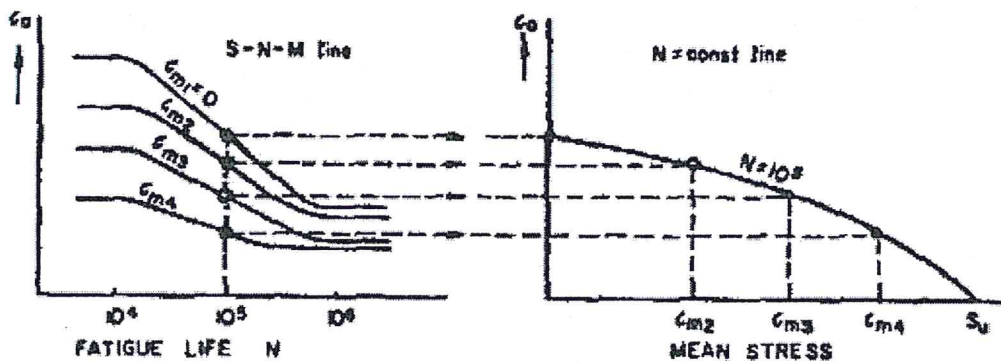
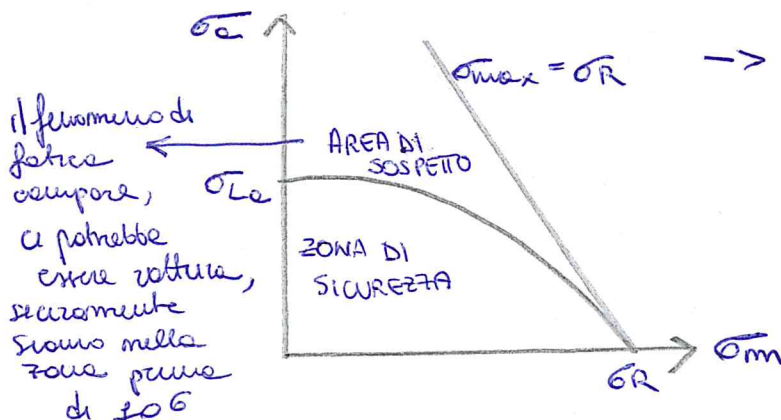


Figura 55: Costruzione del diagramma di Haigh-Soderberg. Qui è mostrata la costruzione della linea $N = \text{const.} = 10^5$, ma ovviamente il procedimento è lo stesso anche per la curva limite di fatica.



il fenomeno di fatica sempre, ci potrebbe essere rottura, sicuramente siamo nella zona perico di 106

→ questa curva finisce per un valore di $\sigma_m = \sigma_R$; i punti al di sopra della retta non hanno significato fisico
 $\sigma_{max} = \sigma_c + \sigma_m \leq \sigma_R$
 σ_c può essere al più nullo ma non negativo, perché per definizione
 $\sigma_c = (\sigma_{max} - \sigma_{min}) / 2 \geq 0$
 Per valori elevati di σ_c non a senso punti di funzionamento, essi si trovano sotto la retta o poco al di sopra d'essa

I valori di σ_m possono essere anche negativi (carichi negativi), ma in generale si considerano soltanto carichi di trazione.

Nello studio della fatica consideriamo soltanto l'area al di sotto della curva. Ci mettiamo sotto la curva per avere un certo grado di sicurezza. Ma la curva è una curva media e bisogna considerare il suo aspetto statistico quindi il punto di fratturamento non deve essere troppo prossimo alla curva, ma neanche troppo in basso, altrimenti sprecheremo tempo e materiale.

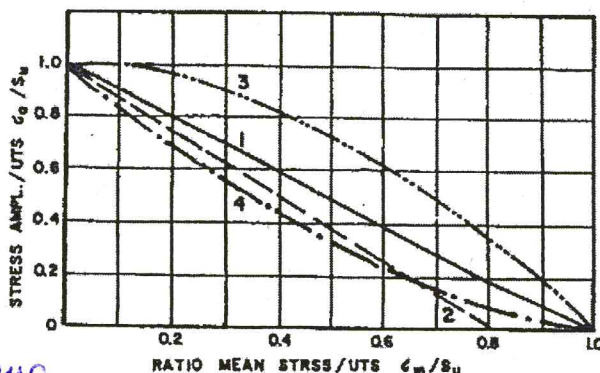


Figura 56: Diagramma di Haigh-Soderberg semplificato secondo varie procedure: 1 - retta di Goodman; 2 - retta di Soderberg; 3 - curva di Gerber; 4 - curva di Smith, usata per materiali fragili

10) Verifica a vita infinita

Possiamo suddividere la fatica in 3 parti: la prima parte è a vita infinita ed è stata introdotta dal Wohler, e viene chiamata anche calcolo a limite di fatica; la seconda parte è composta dalla vita finita; mentre la terza parte è composta dalla propagazione della cricca di fatica.

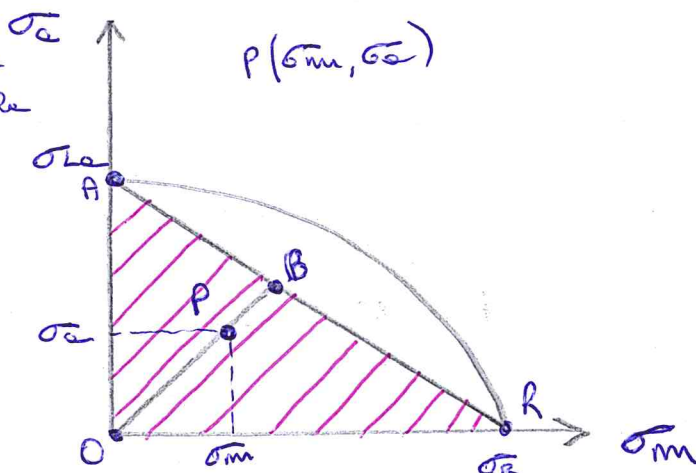
Il progetto e la verifica per una durata infinita del pezzo riguardano solo i materiali per i quali esiste, chiaramente, un limite di fatica. Lo scopo è verificare che sotto un dato carico il pezzo non si rompa, e determinare un coefficiente di sicurezza contro il raggiungimento del limite di fatica. Tale determinazione si fa per mezzo del diagramma di Haigh-Soderberg semplificato, (figura 62) in questo modo: detto P il punto rappresentativo del carico, O l'origine e B l'intersezione tra la retta OB e la retta del limite di fatica. Definiamo in maniera convenzionale un coefficiente di sicurezza dato da:

$$s = \frac{OB}{OP}$$

Se $B \equiv P$ $s=1$ e non ci conviene

Se $P \equiv O$ $s=\infty$ e nemmeno ci conviene

Consideriamo la retta così che si trova sotto la retta, non sotto la curva.



$$(B-O) = S(P-O) \Rightarrow B = SP$$

$$\Rightarrow B(\sigma_m, \sigma_a)$$

La condizione è che il punto B appartenga alla retta AR, la cui equazione è:

$$\frac{x}{x_R} + \frac{y}{y_A} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_m}{\sigma_R} + \frac{\sigma_a}{\sigma_{La}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{S} = \frac{\sigma_m}{\sigma_R} + \frac{\sigma_a}{\sigma_{La}}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{\frac{\sigma_m}{\sigma_R} + \frac{\sigma_a}{\sigma_{La}}}$$

questa formula
tiene conto degli
effetti
della
fatica

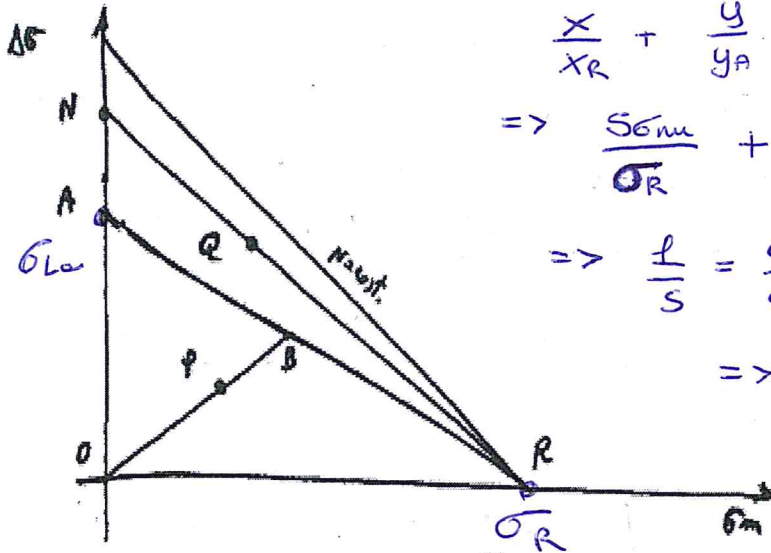


Figura 62: Determinazione del coefficiente di sicurezza in un diagramma di Haigh-Soderberg semplificato

Se poi la linea del limite di fatica e la retta AR si può scrivere la sua equazione segmentaria prendendo per punto generico proprio il punto B che per la definizione data di coefficiente di sicurezza ha per coordinate $(\sigma_m; \sigma_a)$, per cui:

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_R} + \frac{\sigma_a}{\sigma_{La}} = \frac{1}{S}$$

Questa espressione, in cui l'incognita è s ed è perciò una formula di verifica, si scrive in forma più generale tenendo conto dei fattori che influenzano la fatica nel seguente modo:

Formula finale $\rightarrow \frac{K_s \cdot \sigma_m + \frac{K_f \cdot \sigma_a}{C_D \cdot C_S \cdot C_{Lo}} = \frac{1}{S}}$

In cui il coefficiente di intaglio a rottura statica K_s vale:

- $K_s = K_t$ per materiali fragili
- $K_s = 1$ per materiali duttili

K_s = coefficiente d'intaglio a rottura statica

K_f = coefficiente d'intaglio a rottura a fatica

C_D = effetto grandezza

C_S = effetto finitura superficiale

Dobbiamo introdurre dei coefficienti correttivi che tengano conto degli effetti della fatica e dobbiamo vedere quale sono i nostri fattori che ci portano a simili condizioni.

11 VERIFICA A VITA FINITA

Metodo analitico (dispense)

Riguarda i carichi per i quali si prevede una vita finita; si tratta in effetti di prevedere la durata attesa di un organo soggetto a carichi di fatica. Questa impostazione è obbligatoria per i materiali che non presentano un limite di fatica. La chiave di questo procedimento è il calcolo del numero di cicli che portano a rottura il pezzo sotto l'azione di un certo carico, qualora questo sia superiore a quello corrispondente al limite di fatica. La chiave di questo procedimento è il calcolo del numero di cicli che portano a rottura il pezzo sotto l'azione di un certo carico, qualora questo sia superiore a quello corrispondente al limite di fatica.

Si consideri innanzitutto il caso di **mancanza di precarico** (ciclo alterno simmetrico) e si parta da un'approssimazione al diagramma di Wohler, che si ottiene ammettendo che la durata sia di 10^3 cicli per $\sigma_a = 0.8\sigma_R$ e di 10^6 cicli per $\sigma_a = \sigma_{La}$. Oltre i 10^6 cicli la curva del Wohler diventa una retta orizzontale. La prima parte di tale diagramma semplificato ($N < 10^3$) è quello relativo alla fatica oligociclica che qui non sarà trattata, la seconda ($10^3 < N < 10^6$) è quella della resistenza a durata e la terza ($\Delta\sigma < \Delta\sigma_a$) è quella della resistenza a fatica infinita.

La curva del Wohler relativamente al tratto della resistenza a durata è espressa dalla formula:

$$\sigma_0 = \frac{(0.8\sigma_R)^2 * N^b}{\sigma_{La}}$$

Ovvero:

$$N = \left(\frac{(\sigma_0 * \sigma_{La})}{(0.8\sigma_R)^2} \right)^{1/b}$$

Essendo:

$$b = \frac{1}{3} \log \frac{0.8\sigma_R}{\sigma_{La}}$$

Se il materiale non presenta limite di fatica si può per esempio prendere le ampiezze di carico corrispondenti a 10^3 e 10^6 cicli e scrivere:

$$\sigma_0 = \frac{\sigma^2 10^3}{\sigma 10^6} N^b$$

Ovvero:

$$N = \left(\frac{\sigma_0 * \sigma * 10^6}{\sigma^2 * 10^3} \right)^{1/b}$$

Essendo:

$$b = -\frac{1}{3} \log \frac{\sigma \cdot 10^3}{\sigma \cdot 10^6}$$

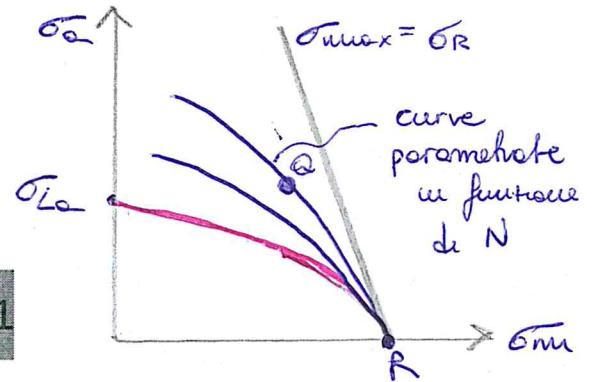
Se il pezzo è sottoposto a precarico la σ_0 si calcola in funzione del precarico e dell'ampiezza usando il diagramma di Haigh Soderberg. In esso (figura 62), nella zona superiore a quella della retta relativa al limite di fatica si tracciano tante curve, che nella consueta approssimazione diventano rette, che passano per il punto R di coordinate $(\sigma_R; 0)$. Quindi per ogni condizione di carico che è rappresentata dal punto Q di coordinate $(\sigma_m; \sigma_a)$, si traccia la retta QR e si prolunga fino all'asse verticale nel punto M di ordinata σ_0 . Questa rappresenta il carico alterno simmetrico che equivale al carico dato nel senso che dà luogo alla medesima durata.

Scrivendo l'equazione segmentaria della retta RQM si ha:

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_R} + \frac{\sigma_a}{\sigma_0} = 1$$

Che in presenza dei fattori che influenzano la fatica diventa:

$$\frac{K_s \sigma_m}{\sigma_R} + \frac{K_f \sigma_a}{S_D S_S \sigma_0} = 1$$



Ci ricaviamo la σ_0 dalla quale poi ci possiamo calcolare, tramite la relazione sopra scritta, il numero di cicli N.

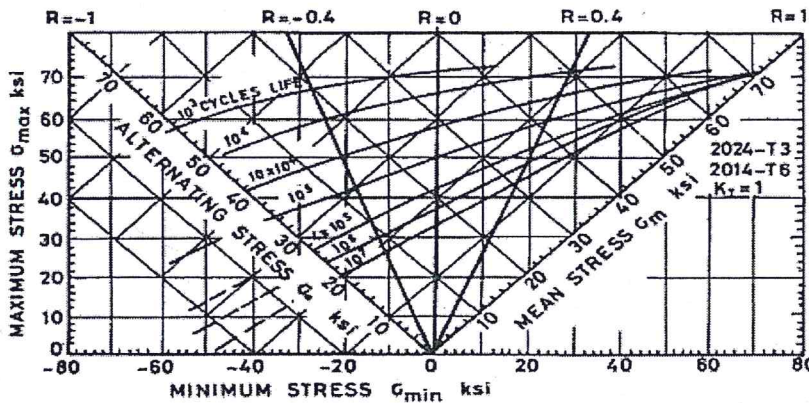


Figura 63: Diagramma di Haigh Soderberg per acciai 2024-T3, 2024-T4 e 2014-T6, provini non intagliati. $\sigma_R = 75$ ksi, $\sigma_s = 52$ ksi per il 2024 e 63 ksi per il 2014. Carico assiale.

M rappresenta una σ_0 cioè un altro punto di fatica simmetrico che non ha precarico; è il carico alterno simmetrico che equivale al carico dato, cioè che dà luogo alla medesima durata.

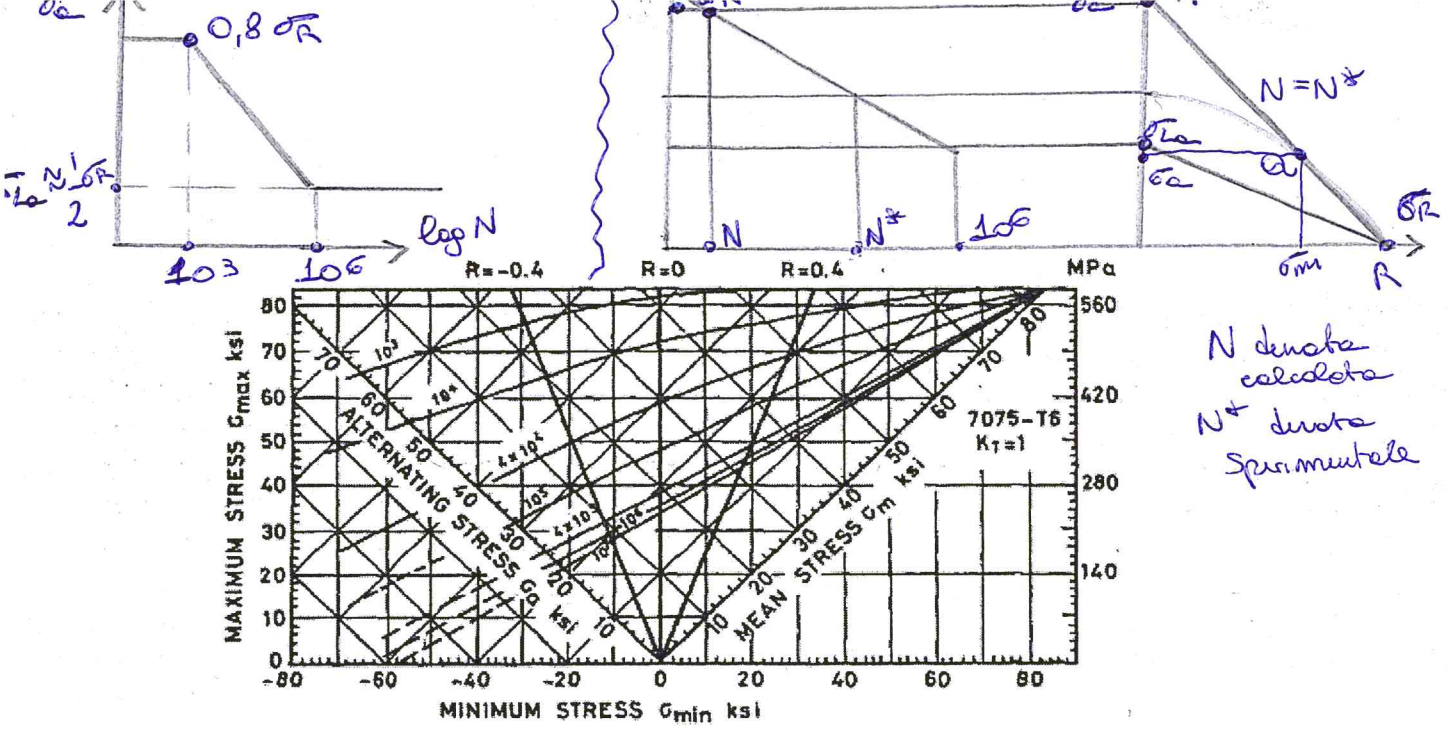


Figura 64: Diagramma di Haigh Soderberg per acciaio 7075-T6, provini non intagliati. $\sigma_R = 82$ ksi, $\sigma_s = 70$ ksi

Metodo grafico (appunti corso) METODO GREG-SODERBERG

La procedura risulta grandemente semplificata se si hanno a disposizione diagrammi sperimentali (del tipo di quelli in figura 63 e 64).

Dati (σ_m , σ_a) del punto di funzionamento Q dobbiamo trovare la durata del numero dei cicli. Lo facciamo con un metodo grafico (il metodo Greg-Soderberg) dove abbiamo varie curve parametrate in numero di cicli. Il metodo grafico consiste nella lettura di un diagramma che è relativo al materiale che stiamo considerando o molto simile al nostro. Il diagramma ha dei punti fissi che possiamo sfruttare, σ_{La} e σ_R , per i quali passa la retta di Gutenberg, al di sopra della quale si trova il nostro punto di funzionamento. La nostra incognita risulta l'ordinata del punto M; a noi interessa la retta MQR e perciò andiamo a scrivere la sua equazione in cui il punto Q (σ_m , σ_a) è quello variabile:

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_R} + \frac{\sigma_a}{\sigma_s} = 1$$

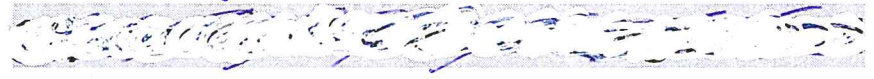
Per analogie e vari passaggi possiamo scrivere:

$$\frac{k_s \sigma_m}{\sigma_R} + \frac{k_f \sigma_a}{\sigma_s} = 1$$

N.B.

Questa formula non è da confondere con quella della vita infinita, è completamente diversa! Qui l'incognita è σ_N tutto il resto è noto!

Ottenuto σ_N avendo il diagramma del Wohler, potremmo leggere la vite. E se non abbiamo il diagramma del Wohler? Abbiamo pensato per un doppio



logorotiamo, utilizzando due punti fissi: uno è B (10^6 , σ_{La}) dove σ_{La} viene letto in una tabella relativa al materiale, e l'altro è A (10^3 , $0,8\sigma_R$), così il punto in cui versa la fatica.

equazione della retta MQR è $\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} = 1$

$x_0 = \sigma_R$ (ascissa)

$\Rightarrow \frac{\sigma_m}{\sigma_R} + \frac{\sigma_a}{\sigma_N} = 1$



12) FATICA COMBINATA $\sigma - \tau$ GOUGH - POLLARD

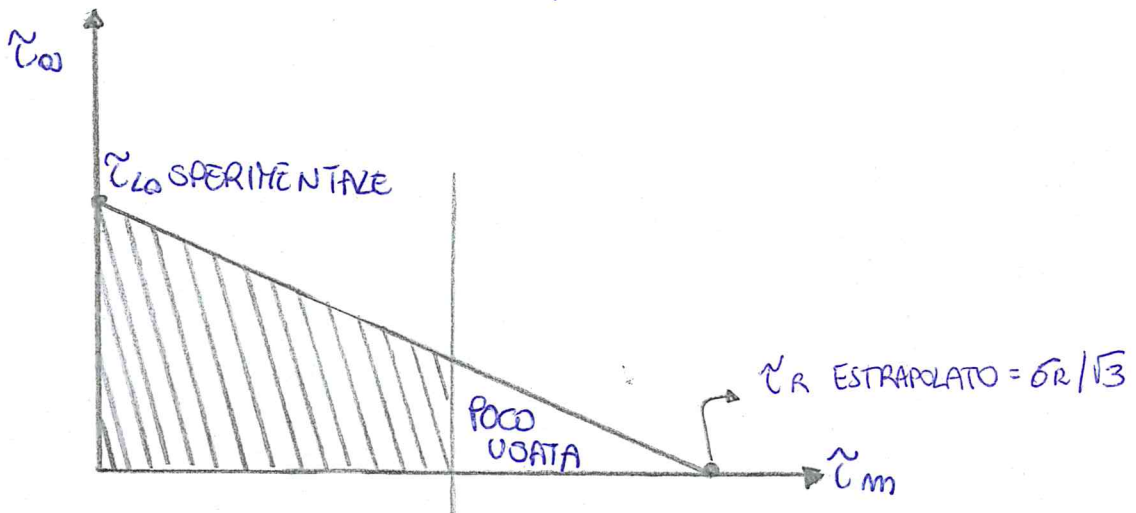
Facciamo le prove di torsione per la vita infinita; vediamo cosa succede quando c'è solo torsione:

Dalle formule più date per la vita infinita:

$$\frac{k_s * \tau_m}{\tau_R} + \frac{k_f * \tau_a}{C_D * C_S * \tau_{La}} = \frac{1}{S}$$

Dove K_s vale 1, K_f è lo stesso, cioè si ricava da K_t , da una sensibilità all'intaglio e ovviamente deve essere preso dall'abaco, dalla tabella del taglio; per C_D e C_S accettiamo le stesse definizioni già date. Per τ_a e τ_{La} sappiamo che sono il corrispettivo di σ_a e σ_{La} ; per quanto riguarda τ_R per Tresca vale $\sigma_R/2$ mentre per Hencky-Von Mises vale $\sigma_R/\sqrt{3}$.

La τ_{La} la si trova, dalle prove di fatica in torsione che troviamo nella letteratura; noi la imponiamo uguale a $\sigma_{La}/\sqrt{3}$. L'approssimazione $\sigma_R/\sqrt{3}$ è più pericolosa di $\sigma_{La}/\sqrt{3}$.

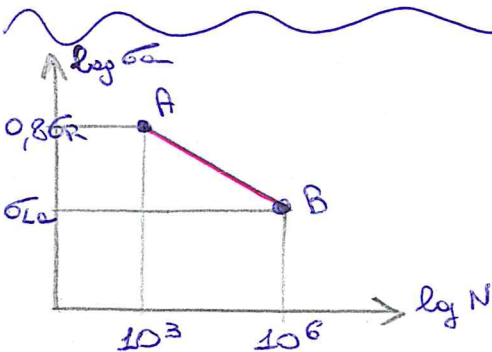


Quella zona è poco usata perché τ_{La} è fisso, ma τ_R viene estrapolato e quindi è soggetto ad un errore di tipo il 30%. L'area soggetta all'aumento maggiore è proprio quella poco usata.

Vita infinita in Torsione + Flessione + Sforzo Normale

La flessione mi dà $1/s_\sigma$; la torsione mi dà $1/s_\tau$ e quindi avrò $1/s_{TOT}$:

$$\left(\frac{1}{s_{TOT}}\right)^2 = \left(\frac{1}{s_\sigma}\right)^2 + \left(\frac{1}{s_\tau}\right)^2 \text{ formula di Gough-Pollard}$$



eq. della retta passante per due punti:

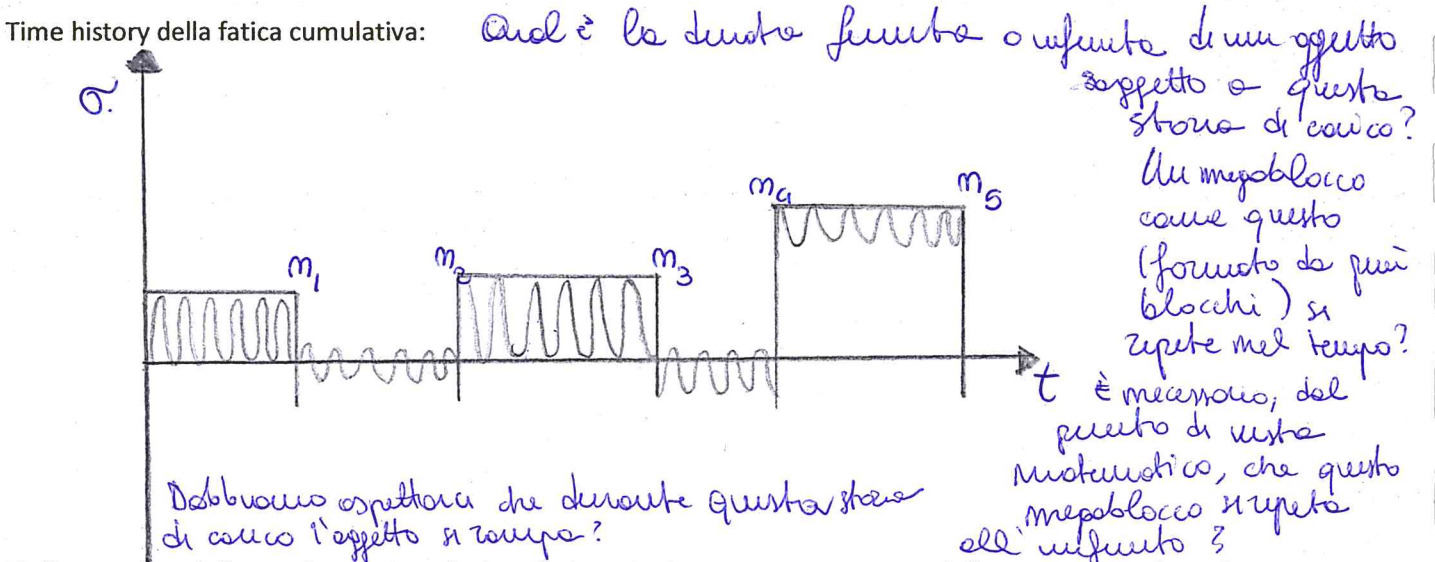
$$\frac{x - x_A}{y - y_A} = \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}$$

$x = \log N$ $y = \log \sigma$
 $x_A = 3$ $y_A = \log [0,8 \sigma_R]$
 $x_B = 6$ $y_B = \log \sigma_{La}$

La nostra incognita è $\log N$.

13) Fatica cumulativa Palmgren-Miner

Ci chiediamo se quando un provino sottoposto ad una prova di fatica non si rompe, esso può essere riutilizzato?



Nello studio della resistenza a fatica finita si tiene spesso conto della presenza di cicli con caratteristiche diverse, per esempio con diverso σ_a e σ_m . Se un pezzo è sottoposto a n_1 cicli con σ_{m1} e σ_{a1} ai quali corrisponde una vita totale N_1 , poi a n_2 cicli con σ_{m2} e σ_{a2} ai quali corrisponde una vita totale N_2 eccetera, il pezzo si rompe o no a seconda che la somma

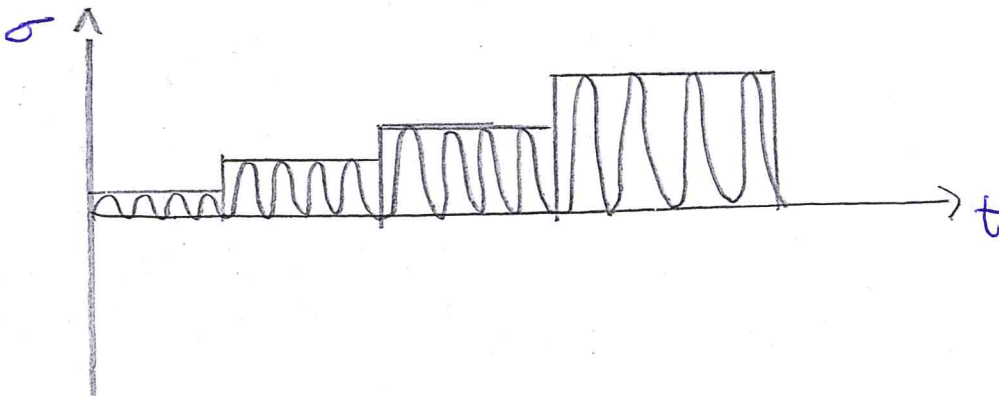
Accumulo lineare del danno di fatica

$$\frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} + \dots + \frac{n_m}{N_m} \approx 1$$

Sia maggiore o minore di 1. Questa regola è detta di Palmgren-Miner o dell'accumulo lineare del danno di fatica. Se questa somma si mantiene al di sotto di 1 la vita non finisce, se è maggiore o uguale di 1 la vita è finita. Al denominatore abbiamo i cicli che il corpo può sopportare, se viene sottoposto a quella sollecitazione, al numeratore invece abbiamo il numero di cicli che effettivamente vive il corpo. La regola Palmgren-Miner non tiene conto delle condizioni iniziali, altrimenti avremmo dei coefficienti dovuti ai termini successivi a n_i/N_i per pesarli di più. Ci sono comunque delle eccezioni, nel senso che potremmo avere rottura prima di arrivare a 1 e potremmo non averla quando superiamo 1.

perché il danno si accumula in modo lineare

Sono stati osservati due tipi di comportamento, uno detto allenamento e l'altro detto affaticamento. Consideriamo un altro tipo di time history:



In questo caso possiamo superare il valore 1 tranquillamente. Questo comportamento si dice allenamento. È come una specie di rodaggio, si allena il materiale a resistere alla rottura. Se rovesciamo il tempo la rottura si ha molto prima dell'1 e questo è il comportamento detto affaticamento (forse).

La regola Palmgren-Miner viene scritta anche in termini di carico equivalente; se la formula di N (in mancanza di precarico) viene scritta facendo comparire l'ampiezza di carico si ha:

$$\sum \frac{m_i}{N_i} \propto \sum \sigma_{0i}^{-1/b} \cdot n_i = \sigma_{eq}^{-1/b} \sum n_i$$

σ_{eq} è quell'ampiezza di tensione che procura lo stesso danno dei blocchi di carico effettivi. Si ha in definitiva che:

$$\sigma_{eq} = \sqrt[m]{\frac{\sum \sigma_{0i}^m}{\sum n_i}}$$

Con $m = -1/b$. Nel caso di precarico non nullo σ_0 si calcola con:

$$N = \left[\frac{(\sigma_0 \times \sigma_{La})^m}{(0,8 \sigma_R)^2} \right]^{1/b}$$

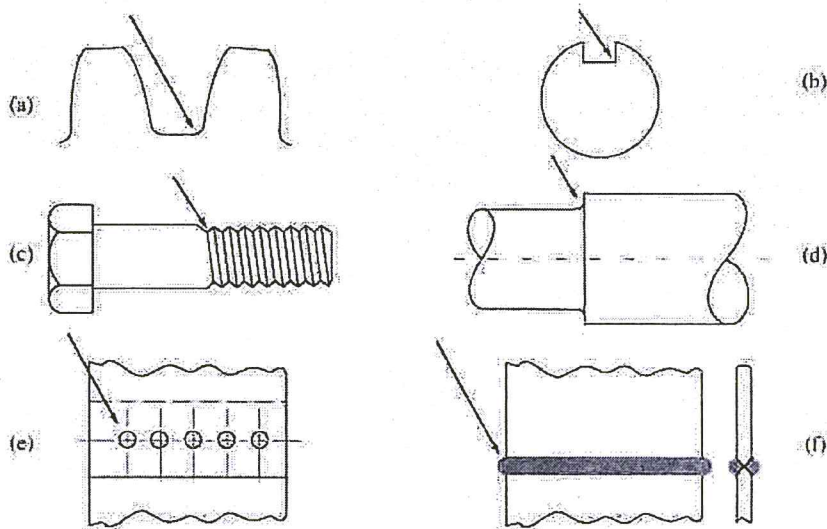
O con:

$$\frac{K_S \times \sigma_m}{\sigma_R} + \frac{K_F \times \sigma_a}{C_D \times C_S \times \sigma_N} = 1$$

14) EFFETTO D'INTAGLIO

* *Parliamo di intaglio quando abbiamo un solido che non è quello di DSV.*
 Nella maggior parte dei casi, in un componente di un organo di macchine vengono a mancare le ipotesi del solido di De Saint Venant; ciò accade poiché la geometria del componente spesso non presenta sezioni costanti, ma anzi presenta delle irregolarità come, ad esempio, i fori in lastre piane, gli spallamenti degli alberi, gli incavi per linguette e chiavette. Tali irregolarità geometriche sono dette INTAGLI e danno luogo ad una concentrazione di tensione detta EFFETTO D'INTAGLIO.

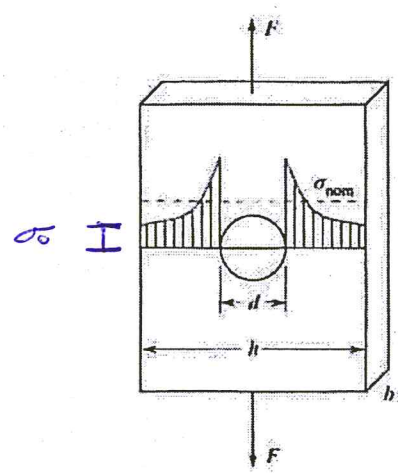
* Fattori d'intaglio: i problemi per le prove di fatica sono abbastanza analoghi ai problemi per le prove di trazione e compressione; sono un po' più piccoli, non hanno il diametro di 20mm; hanno però le stesse caratteristiche: a suo due teste per l'effettivo e un corpo cilindrico - la fatica superficiale deve essere adeguata elevata - Il diametro è attorno ai 10mm. Anche la dimensione è piuttosto piccola, la forma è piuttosto semplice e la fatica è elevata, i problemi sono simili a quelli.



Esempi di intagli negli elementi di macchine: a) ruota dentata; b) sede di una linguetta; c) filettatura di una vite; d) spallamento di un albero; e) fori per il passaggio delle viti; f) giunzione saldata.

N.B. : le ipotesi di De Saint Venant sono: sulla geometria del solido (trave a sezione costante ad asse rettilineo in cui la lunghezza è molto maggiore della sezione trasversale), sul materiale (la trave è costruita di materiale elastico a elasticità lineare, ossia deve valere la Legge di Hooke) e infine sulle condizioni di carico (le forze di superficie possono esserci ma solo sulle due basi: la superficie laterale è scarica => $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$)

Consideriamo una lastra piana soggetta ad una tensione uniforme σ_0 ma con un foro:



$K_T =$ coefficiente teorico d'intaglio

La distribuzione delle tensioni si presenta uniforme nelle sezioni lontane dal foro e fortemente disomogenea in prossimità del foro, notiamo infatti delle punte di tensione pari a σ_{max} alle estremità del foro. *che per vanno e si smorzano lontano dal foro (lontano dal foro è come se il foro non ci fosse).*

Ipotizziamo che il materiale di riferimento sia idealmente elastico, ossia con comportamento sempre lineare, la trattazione dell'intaglio si imposta ponendo: $\sigma_{max} = \sigma_n \cdot K_T$, dove σ_n è la tensione che si calcolerebbe nella zona dell'intaglio in assenza dell'intaglio, viene definita tensione nominale, e K_T un

Tutto ciò vale se il foro è abbastanza piccolo, cioè il foro deve essere abbastanza piccolo rispetto alla lastra, di diametro trascurabile rispetto alla lastra.

coefficiente detto coefficiente teorico di intaglio, chiamato così perché è ricavato dalla teoria dell'elasticità e inoltre dipende solo dalla geometria del problema.

La determinazione dei valori di K_t è stata ottenuta attraverso analisi analitiche, vie sperimentali, o calcoli numerici eseguiti tramite il metodo degli Elementi Finiti. Occorre precisare che la conoscenza di tale coefficiente ci permette di calcolare il valore della tensione massima σ_{max} , difficile da valutare tramite calcoli analitici, una volta nota la tensione nominale σ_n , che invece si può calcolare molto più facilmente se nella zona d'intaglio si ipotizza la presenza di una sezione costante (non intagliata).

Se il foro è di piccole dimensioni rispetto alla larghezza della trave : $K_t = 3$, quindi $\sigma_{max} = 3\sigma_n$.

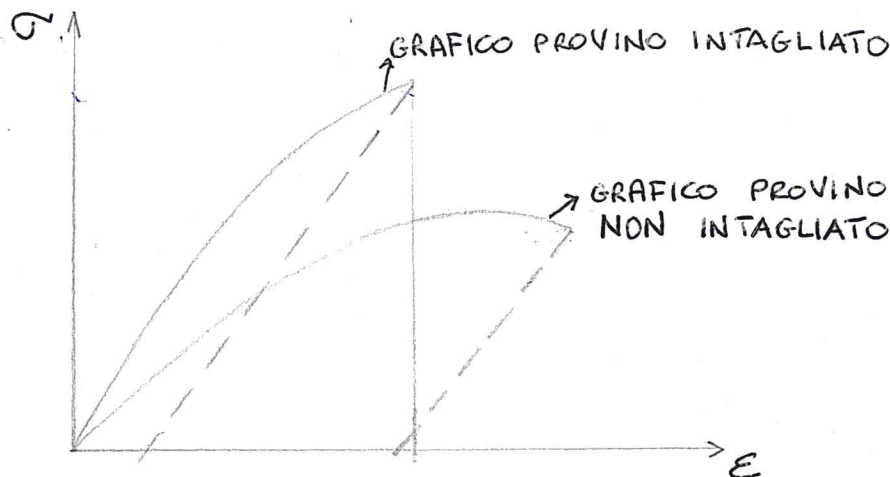
L'effetto d'intaglio sulla fatica:

Consideriamo due provini: uno intagliato e l'altro non intagliato, aventi la stessa sezione e la stessa forza applicata.

Fin ora abbiamo ipotizzato che K_t non sia influenzato dal materiale dell'elemento meccanico, ma un esame del comportamento reale del componente mostra che l'effetto di una discontinuità di forma dipende dalle caratteristiche del materiale, in particolare dalla sua fragilità o duttilità. A tal proposito introduciamo due coefficienti : K_S e K_f che tengono conto del comportamento del materiale del provino intagliato rispetto alla prova statica e la prova di fatica.

Prova statica con provino intagliato:

Nel provino non intagliato il grafico σ - ϵ ha questo andamento:



Riportando sullo stesso grafico anche l'andamento del provino intagliato vediamo che è più rettilinea la curva. L'energia assorbita dal provino intagliato è drasticamente minore. Ma utilizzando questa formula noi non teniamo conto dell'energia assorbita ma solo della σ di rottura e cioè:

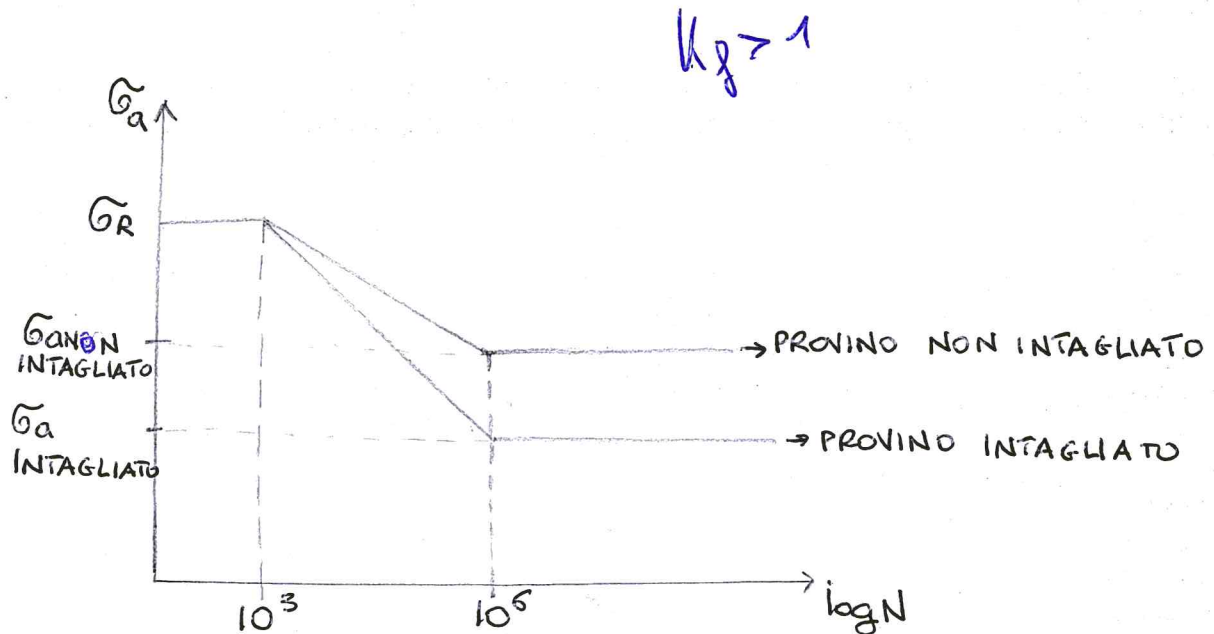
$$K_S = \frac{\sigma_R(\text{non intagliato})}{\sigma_R(\text{intagliato})}$$

Per i materiali duttili $K_S = 1$

Per i materiali fragili $K_S = K_t$

Prova a fatica con provino intagliato:

Nel caso della fatica si ha un abbassamento della σ_{La} , ma di quanto? Andiamo a disegnare il diagramma del Woehler:



Per il diagramma del provino intagliato abbiamo che la σ_R resta la stessa mentre la σ_{La} si riduce, quindi effettuo un raccordo "a sentimento". Definisco quindi il coefficiente di intaglio a fatica:

$$K_f = \frac{\sigma_{La}(\text{non intagliato})}{\sigma_{La}(\text{intagliato})}$$

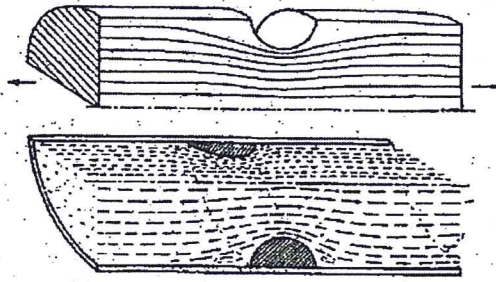
E possiamo dire che: $1 \leq K_f \leq K_t$

Il K_t è ottenuto tramite calcoli; il K_f è il frutto di risultati sperimentali

15) ANALOGIA IDRODINAMICA

Esiste un metodo intuitivo in grado di prevedere l'esistenza delle concentrazioni di tensione e il loro effetto. Questo metodo è quello dell'analogia idrodinamica; esso è il miglior modo per visualizzare le concentrazioni di tensioni, in molti casi ci può aiutare a determinare i punti più soggetti ad intaglio o addirittura a ridurne l'incidenza tramite opportune modifiche della forma del pezzo. Per comprendere tale metodo assimiliamo un'asta con un intaglio ad un tubo avente la stessa sezione e nel quale scorre un fluido:

Considerando la lastra con il foro, lo stato tensionale è apparentemente monoassiale ma nelle prominenze del foro è pluriaassiale -
 Si considera un anello di forze dF nelle prominenze del foro e per le si considera come un flusso di un fluido perfetto.



Come sappiamo le linee di flusso del fluido si addensano in corrispondenza di spigoli rientranti e si diradano in corrispondenza di spigoli sporgenti, con rispettivo aumento o diminuzione della velocità del fluido; l'analogia fa corrispondere alla velocità del fluido punto per punto la tensione elastica nel punto corrispondente; perciò dove si hanno aumenti di velocità si hanno anche aumenti di tensione. Tale metodo permette anche di capire, intuitivamente, che quanto più è brusca la variazione di sezione, tanto maggiore è l'addensamento del flusso.

L'analogia idrodinamica aiuta a discutere il caso degli intagli in serie e in parallelo: due intagli si dicono in serie se il flusso di tensione li investe l'uno dopo l'altro, sono in parallelo se li investe contemporaneamente. E' facile intuire che nel caso degli intagli in parallelo si ha un aumento dell'effetto d'intaglio in quanto si ha un "doppio" restringimento della sezione, al contrario nel caso degli intagli in serie uno dei due intagli funge da protezione per l'altro, per cui il coefficiente d'intaglio complessivo può essere minore di quello dei due singoli intagli se fossero isolati.

16) INTAGLIO ELLITTICO

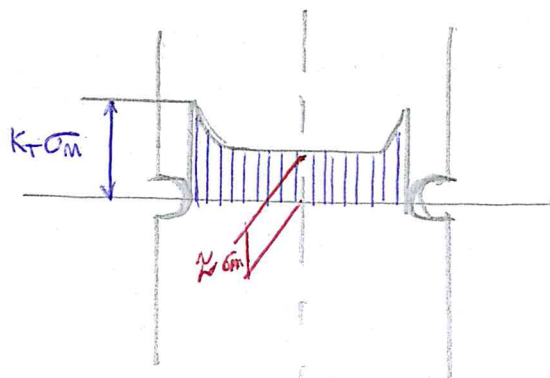
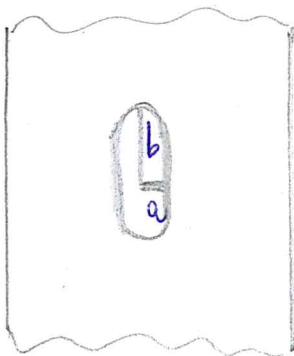
Consideriamo una lastra indefinita caricata uniformemente a grande distanza dal foro da una tensione costante σ_0 in direzione verticale, che viene scelta come tensione nominale: $\sigma_0 = \sigma_n$. La teoria dell'elasticità mostra che, in presenza di un foro ellittico di semiassi a e b , la tensione ai bordi laterali del foro agisce in direzione verticale ed è data da:

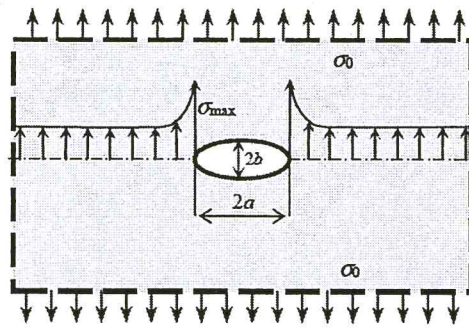
$$\sigma_{max} = \sigma_0 \left(1 + 2 \frac{a}{b} \right) = \sigma_0 \left(1 + 2 \sqrt{\frac{a}{c}} \right)$$

essendo il raggio di raccordo così definito: $c = b^2 / a$

Come abbiamo già detto $\sigma_0 = \sigma_n$ quindi si ha:

$$K_T = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n} = 1 + 2 \sqrt{\frac{a}{c}}$$





Lastra indefinita con foro ellittico

Se l'ellisse diventa un cerchio e l'equazione precedente:

$$\sigma_{max} = \sigma_0 \left(1 + 2 \frac{a}{b}\right) = \sigma_0 \left(1 + 2 \sqrt{\frac{a}{c}}\right) \text{ si riduce a } \sigma_{max} = 3\sigma_0, \text{ da cui: } K_T = 3$$

N.B. : la tensione nominale è monoassiale.

17) SENSIBILITA' ALL'INTAGLIO

Nel caso di prova a fatica sul provino intagliato abbiamo introdotto il coefficiente (o fattore) di intaglio a fatica K_f , definito come il rapporto tra il carico limite di un elemento non intagliato e il carico limite di un elemento intagliato avente entrambi la stessa sezione minima:

$$K_f = \frac{\sigma_{La}(\text{non intagliato})}{\sigma_{La}(\text{intagliato})}$$

Questo fattore può essere ricavato per via sperimentale, o attraverso una formula che mette in relazione il K_f e il coefficiente teorico di intaglio K_t :

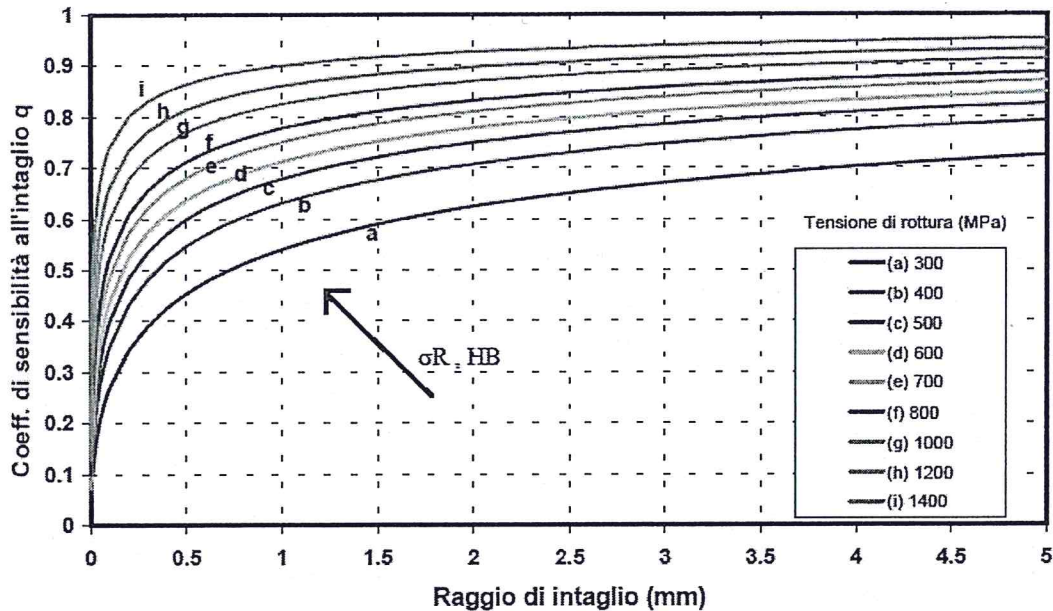
$$(1 - K_f) = q(1 - K_t)$$

q è la SENSIBILITA' D'INTAGLIO, che è una caratteristica del materiale ed è compreso tra 0 e 1.

In pratica un materiale può essere più o meno sensibile alla presenza di un intaglio:

- se $q=0 \rightarrow K_f = 1 \rightarrow \sigma_{La}(\text{non int.}) = \sigma_{La}(\text{intag.})$ caso che non ci interessa
- se $q=1 \rightarrow K_f = K_t$ massima sensibilità d'intaglio

Questo fattore, che dipende dal materiale e dal raggio in gola all'intaglio ρ , si trova nel grafico di Neuber:



Le curve sono delle curve di livello parametrizzate in funzione di σ_R o HB (durezza Brinell), e per valori di raggio in gola all'intaglio pari a circa un millimetro possiamo approssimare tali curve ad asintoti orizzontali.

Secondo la teoria di Neuber dell'intaglio limite:

$$q = \frac{1}{1 + \sqrt{\rho'/\rho}}$$

essendo ρ' una proprietà del materiale a sua volta funzione del carico di rottura. Il significato fisico della teoria di Neuber è che un intaglio di raggio inferiore a ρ' viene visto dal materiale come uno spigolo "acuto" (di raggio nullo), per cui per esso cade in difetto la teoria elastica e occorre procedere a considerazioni energetiche.

PREMESSA:

Il comportamento a fatica dei vari componenti meccanici è influenzato sia da fattori interni, che dipendono dalla natura e dalle caratteristiche del materiale, sia da fattori esterni derivanti dall'ambiente e dalle condizioni di utilizzo. La fatica di un organo meccanico comporta l'ampliamento di una cricca e si conclude con il suo cedimento.

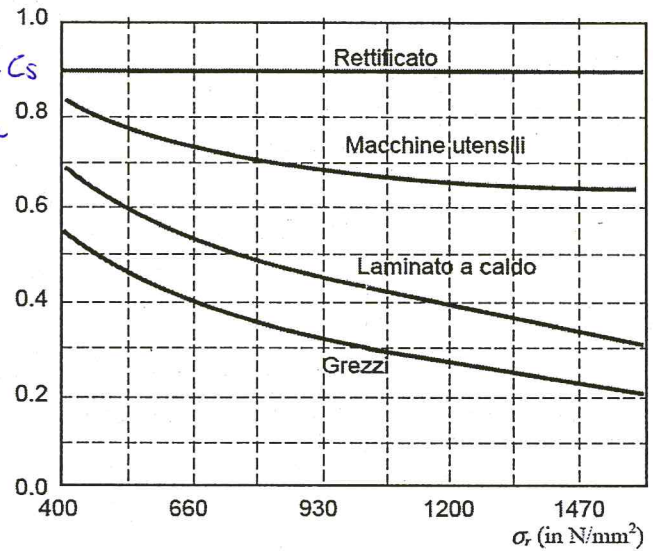
Analizzeremo alcuni fattori interni che influenzano la fatica che sono: l'effetto finitura superficiale e l'effetto grandezza.

18) EFFETTO FINITURA SUPERFICIALE

L'effetto finitura superficiale è uno degli effetti che influenzano la fatica. Questo effetto è legato alla rugosità ed è espresso mediante un fattore indicato con C_s ; tale fattore si ricava attraverso un grafico (ottenuto per via sperimentale):

La maggior parte delle cricche di fatica nascono sulla superficie - se vengono più esse trattate chimicamente o metallurgicamente, quindi noi utilizziamo le legami superficiali che possono lasciare gli utensili.

$\sigma_{effettiva} = \sigma_{o\ nominale} \cdot C_s$
 $C_s = \text{coeff. di finitura superficiale}$
 $C_s \leq 1$
 Re indica la rugosità



(I fattori mostrati sul diagramma sono ottenuti mediante un gran numero di prove condotte sugli acciai.)

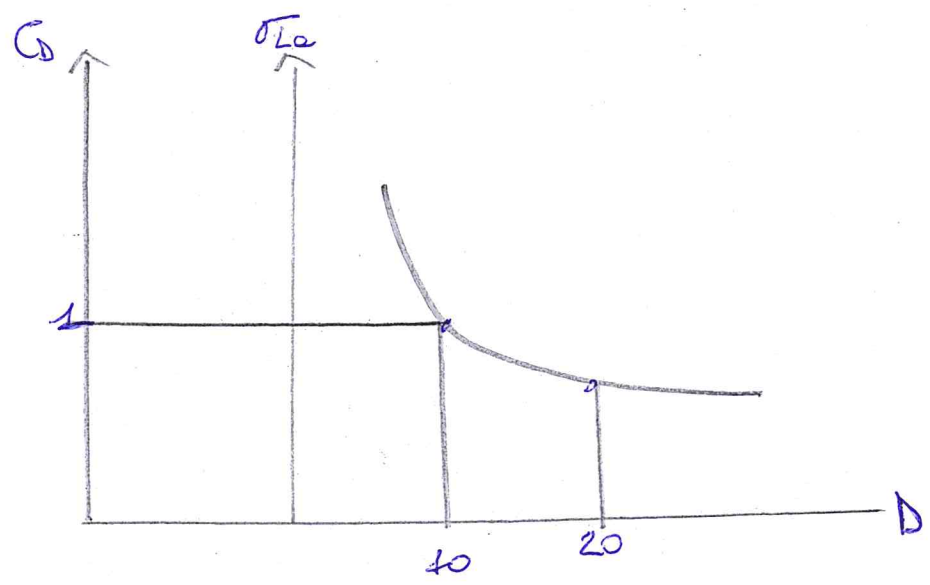
L'effetto finitura superficiale si ritiene originato dai microintagli che gli utensili lasciano sulla superficie del pezzo; difatti le irregolarità della superficie, come i graffi, costituiscono punti di concentrazione delle tensioni.

Tanto peggiore è la finitura tanto più facile sarà l'instaurarsi di un processo di rottura; difatti più bassa è la rugosità, migliore risulta la resistenza a fatica.

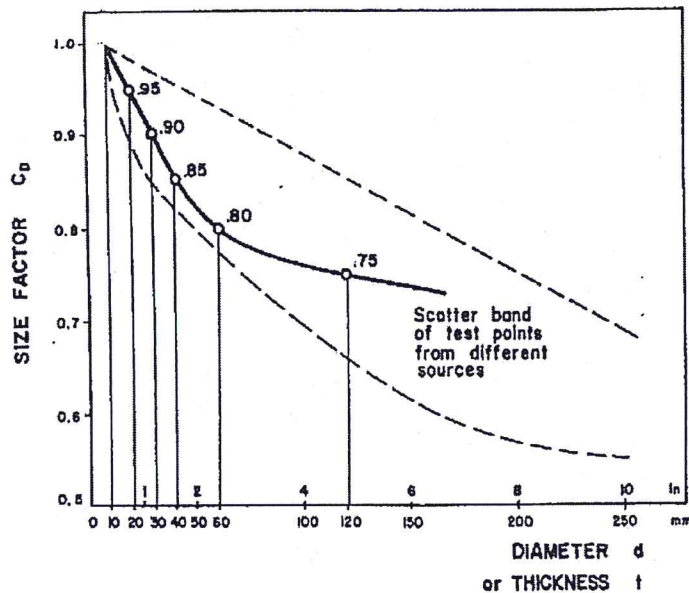
Un acciaio costoso ~~risulta~~ molto di questo aspetto della finitura superficiale; con buon acciaio finito male può essere peggiore di un acciaio meno buono ma finito bene. VEDI ANCHE RULLATURA E PALLINATURA

19) EFFETTO GRANDEZZA (o SCALA):

L'effetto grandezza è uno dei fattori che influenzano la fatica. Questo effetto è espresso mediante un fattore indicato con C_D ; tale fattore si ricava attraverso un grafico (ottenuto per via sperimentale):



Si osserva che σ_c non dipende soltanto dal materiale ma anche dalla grandezza del provino. A senso dei diagrammi del tutto empirici, in funzione del diametro, esse ottenuti dalla sperimentazione di provini con diametri diversi.



Questo tipo di effetto è dovuto al fatto che in un pezzo di grosse dimensioni è più difficile (e improbabile) avere un'elevata omogeneità e qualità di lavorazione. Inoltre le dimensioni maggiori implicano una maggiore superficie e questa ad una maggiore probabilità che vi sia già presente un microintaglio o un difetto superficiale che sono responsabili dell'innescio del processo di rottura per fatica.

20) LA RIVELAZIONE DELLE CRICCHE

I metodi per la rivelazione delle cricche e di altri difetti quali bolle o soffiature di fusione, difetti di saldature, ecc, vanno sotto il nome di controlli non distruttivi. Tali controlli sono tecniche di ispezione su un materiale senza determinarne il danneggiamento. Lo scopo è quello di valutare l'integrità del materiale in esame. Esistono diversi controlli non distruttivi che possono essere schematizzati in due grandi gruppi: controlli "superficiali" e controlli "volumetrici". Tra i controlli "superficiali" troviamo: i liquidi penetranti, i metodi elettromagnetici (magnetoscopia), la termografia e l'ispezione visiva. Essi si limitano a fornire informazioni su difetti superficiali o sub-superficiali. Invece fanno parte dei controlli "volumetrici": ultrasuoni e radiografia, con questi è possibile investigare su eventuali difetti interni.

Liquidi penetranti:

La prova non distruttiva detta dei liquidi penetranti è una procedura di ispezione che si basa sulla penetrazione di un liquido colorante o fluorescente, di determinate caratteristiche di tensione superficiale, bagnabilità e capillarità (e bassa viscosità).

Il penetrante viene cosparso sul materiale (precedentemente pulito e sgrassato) mediante spruzzatura, pennello o immersione, permettendo così all'azione capillare di agire per il tempo necessario alla penetrazione negli eventuali difetti affioranti. In seguito il penetrante in eccesso viene eliminato tramite lavaggi, rimozione con panni umidi o immersione in liquido emulsionabile, poiché la superficie dovrà

controlli non distruttivi superficiali: liquidi penetranti, magnetoscopia, termografia, ispezione visiva.

controlli non distruttivi volumetrici: ultrasuoni e radiografia.

risultare esente da tracce di penetrante. Dopo l'essiccazione si applica un sottile strato di rivelatore allo scopo di assorbire ed attirare verso la superficie il penetrante rimasto intrappolato nelle discontinuità. Sarà così possibile, grazie all'azione della capillarità, rilevare sul pezzo in esame gli eventuali difetti. Anticamente i liquidi penetranti fluorescenti richiedevano l'uso della lampada di Wood (luce ultravioletta), ma oggi la fluorescenza può essere benissimo eccitata anche dalla luce visibile. Questo metodo ha il vantaggio di essere economico, abbastanza ecologico, rapido e di fornire anche una valutazione quantitativa delle cricche, in quanto se ne può misurare la lunghezza. Lo svantaggio sta nel fatto che non può rilevare cricche non aperte né soffiature o cavità varie.

Magnetoscopia:

Questa tecnica si basa sull'analisi delle variazioni nel campo magnetico che si verificano in presenza di difetti superficiali o sub-superficiali. Ovviamente è un controllo che può essere applicato solo su materiali ferromagnetici.

Per quanto riguarda la procedura, possiamo dividere questa in varie fasi. Come prima cosa avviene la preparazione della superficie del pezzo. In questa fase preliminare occorre verificare che la superficie del pezzo sia esente da grasso e polvere, questo perché la presenza di contaminanti può ostacolare il movimento delle particelle magnetiche sotto l'azione del campo esterno, rendendo difficoltosa la visualizzazione dei difetti. La seconda fase è quella di magnetizzazione del pezzo, ossia si procede all'applicazione del campo magnetico sul pezzo da testare. Il tipo di campo magnetico da generare per il controllo dipende dal presunto orientamento dei difetti che ci si aspetta di riscontrare e dalla geometria del pezzo.

Il principio di base è quello secondo il quale le linee di flusso del campo magnetico indotto in un materiale ferromagnetico dal passaggio di una corrente impressa subiscono delle deviazioni in presenza di discontinuità. L'attrazione delle particelle è massima quando la discontinuità è parallela alla direzione della corrente, cioè ortogonale alle linee di flusso magnetico; per questo motivo si effettuano più prove per diverse orientazioni.

Infine avviene la smagnetizzazione del pezzo, applicando un campo magnetico di polarità inversa al precedente e di intensità gradualmente decrescente.

Raggi X e Gamma:

La radiografia è la tecnica che consente di ottenere immagini del contenuto di un solido mediante impressione di un elemento sensibile (pellicola, schermo) da parte di radiazioni ionizzanti quali raggi X e gamma. I raggi X e gamma sono radiazioni elettromagnetiche di ben definita lunghezza d'onda (i raggi X hanno una frequenza di $10^{12} \div 10^{14}$ MHz e lunghezza d'onda $\lambda = 1 \text{ \AA}$).

Il principio fisico di base è legato al differente assorbimento delle radiazioni nel pezzo in funzione della variazione di spessore.

L'informazione ottenibile da un singolo controllo radiografico è bidimensionale e, come tale, deve essere integrata con altre radiografie (o con altri metodi volumetrici) affinché la discontinuità possa essere completamente caratterizzata. È opportuno orientare il pezzo in modo che i raggi X siano ortogonali alla direzione della dimensione maggiore del difetto, per questo motivo è preferibile effettuare più prove in più direzioni.

Questi metodi sono quasi indispensabili per rilevare cavità chiuse, ma hanno lo svantaggio di essere costosi e di richiedere tutta una serie di metodi di protezione per l'operatore.

Ultrasuoni:

Questo esame è basato sul fenomeno della riflessione e trasmissione degli ultrasuoni. L'ispezione mediante ultrasuoni è un metodo non distruttivo in cui onde sonore ad alta frequenza sono indotte nel materiale da esaminare allo scopo di evidenziare difetti superficiali o interni.

Questi ultrasuoni vengono generati per azione di un trasduttore piezoelettrico, che può fungere anche da ricevitore. La piezoelettricità è la proprietà di alcune sostanze, tra cui il quarzo, di deformarsi se vengono polarizzate elettricamente, ossia se sono sottoposte ad un campo elettrico; viceversa, se queste sostanze vengono deformate si polarizzano, ossia diventano sedi di cariche elettriche di segno opposto su facce opposte.

Il trasduttore piezometrico è quindi un cristallo di quarzo posto tra le armature di un condensatore; se le armature vengono caricate il cristallo si deforma; se nel condensatore vi è un campo elettrico oscillante il cristallo vibra; diviene così una sorgente di ultrasuoni.

Se viceversa il cristallo vibra diventa sede di un campo elettrico oscillante che può essere rilevato dal condensatore e poi amplificato; così il cristallo funge da ricevitore.

Le onde ultrasonore si propagano nel solido da esaminare e vengono riflesse dalla superficie opposta al ricevitore; il ritardo dell'eco di ritorno misura la dimensione del pezzo; eventuali altri segnali di eco segnalano la presenza di discontinuità o di cavità.

Questo metodo è adatto alla rilevazione di cavità sia chiuse che affioranti purchè di dimensioni sufficienti; non richiede protezione dell'operatore ed è abbastanza economico, anche se, al contrario dei liquidi penetranti richiede apparecchiature di costo non trascurabile.

21) 22) 23) MECCANICA DELLA FRATTURA ("Dimostrazione" di Griffith, ossia bilancio energetico) / DEFINIZIONE DI TENACITA' ALLA FRATTURA / DEFINIZIONE DI FATTORE DI INTENSITA' DEGLI SFORZI

Spesso gli elementi strutturali sono soggetti a rotture improvvise per sollecitazioni statiche inferiori alla tensione di rottura del materiale senza che si verificano deformazioni macroscopiche apprezzabili.

In molti casi la rottura inizia da una discontinuità (o difetto) del materiale, anche di piccole dimensioni, avente raggio di curvatura nullo alle estremità (frattura, cricca) che, a certe condizioni, si propaga a velocità elevata. La propagazione delle cricche è oggetto di studio della meccanica della frattura, che si basa su un'idealizzazione del materiale considerato come continuo, studiato mediante la teoria dell'elasticità lineare o dell'elasto-plasticità.

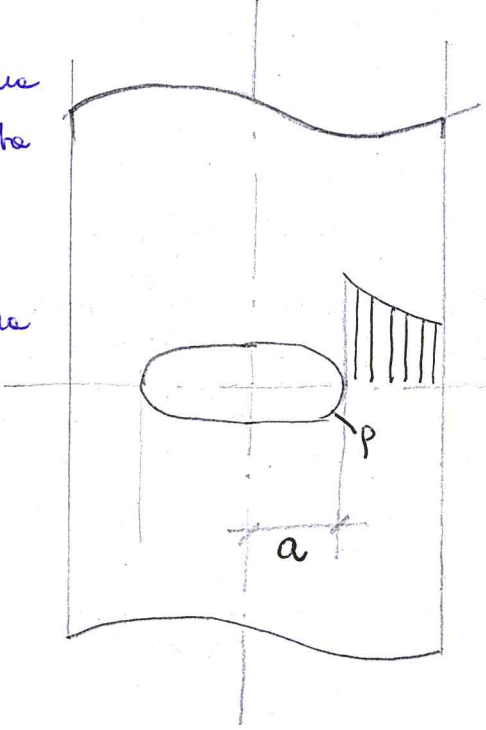
Consideriamo un intaglio ellittico:

$K_t = 1 + 2\sqrt{a/\rho}$, dove ρ è il raggio di curvatura

K_t = coefficiente teorico
d'intaglio

Vi sono dei casi in cui strutture anche di grandi dimensioni cedono istantaneamente dividendosi in due parti per propagazione istantanea di una frattura preesistente. Questo tipo di cedimento si evidenzia quando si difformano le costruzioni soldate in campo navale. Il difetto da cui scaturisce istantaneamente la rottura è un difetto di saldatura o anche cedimento dell'angolo di un campo ripetuto (fatica) e si presenta come una lesione ~~istantanea~~, al cui capo il raggio di curvatura

Tale difetto non si presta ad essere trattato con le teorie dell'elasticità; infatti questa predice all'apice della cricca una tensione infinita, che dovrebbe produrre la frattura in ogni caso; invece si constata che una cricca può rimanere dormiente anche sotto sollecitazioni non trascurabili per poi attivarsi improvvisamente.



Nel materiale fragile mi aspetto :

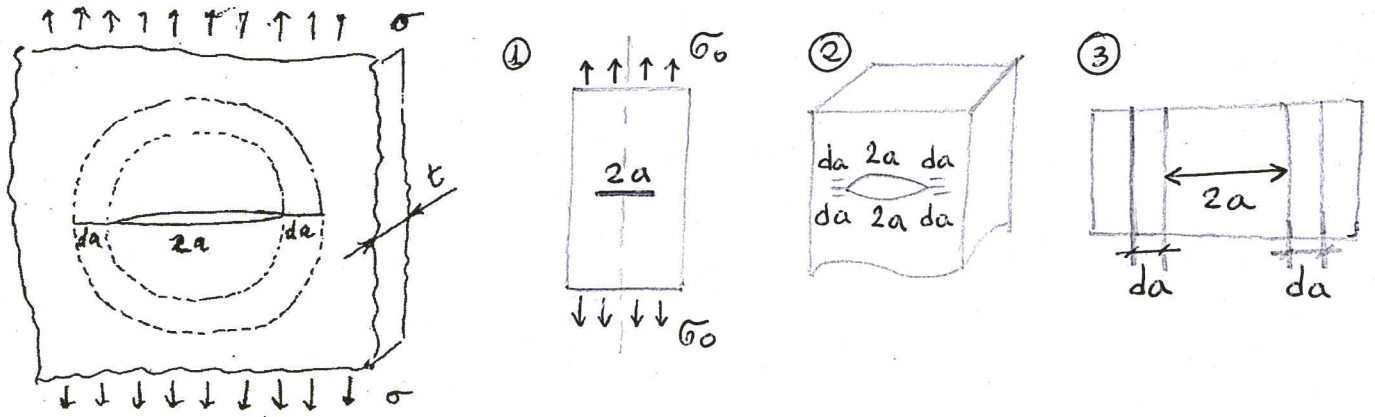
$$\sigma_{R \text{ EFFETTIVO}} = \frac{\sigma_{R \text{ TABELLATO}}}{K_T}$$

In teoria bisognerebbe avvertire la propagazione, e quindi la rottura, immediata, ma non è così. Perché? L'ha spiegato un certo Griffith. Egli applicò dei criteri energetici alla frattura. La superficie è una interfaccia tra materiali eterogenei, dove troviamo un'irregolarità abbiamo una concentrazione di energia.

La propagazione di una cricca richiede energia per la creazione delle nuove superfici di frattura; l'energia richiesta è proporzionale all'area delle nuove superfici e dipende dal materiale.

Durante la propagazione della cricca c'è però una liberazione di energia dovuta al fatto che le zone immediatamente a monte e a valle della cricca sono scariche; nella propagazione man mano che la cricca avanza cresce la zona scarica per cui l'energia che in essa era immagazzinata si rende disponibile.

Se da "a" passiamo ad "a+da" dobbiamo somministrare energia:



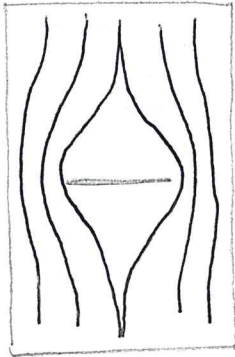
Nell'esempio di una fessura passante in una lastra di spessore t , sottoposta ad una tensione σ_0 per effetto di un allungamento "da" da ciascuna delle due parti si ha un assorbimento di energia pari a:

$$dW = 4t \cdot da \cdot R$$

* mentre si ha una liberazione di energia che si può grossolanamente stimare ipotizzando che la parte scaccata sia una corona circolare di raggio interno a e spessore db

dove R è l'energia necessaria per creare una superficie di area unitaria, per effetto della creazione di 4 nuove superfici. W è quindi l'energia richiesta per allungare la cricca. Il potenziale elastico deve aumentare da una parte e diminuire dall'altra.

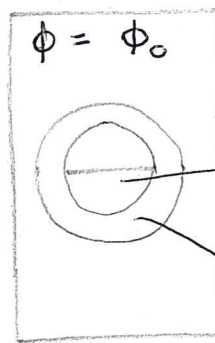
↓
4 tda e la
muove
superficie



vicino alla cricca il potenziale elastico è piccolo quindi lo possiamo uguale a 0

$$\phi_0 = \frac{1}{2} \sigma_0 \varepsilon = \frac{1}{2} \frac{\sigma_0^2}{E}$$

Se la cricca si espande, nelle sue vicinanze il materiale si ~~realizza~~ *rilassa* e libera energia. Se l'energia finisce, il proprio si sta propagando la cricca e quindi abbiamo la condizione necessaria affinché la cricca si allunghi.



$$VOL = 2\pi a \cdot da \cdot t$$

ENERGIA RILASCIATA :

$$\frac{1}{2} 2\pi a \cdot da \cdot t \frac{\sigma_0^2}{E} = U$$

ENERGIA RICHIESTA :

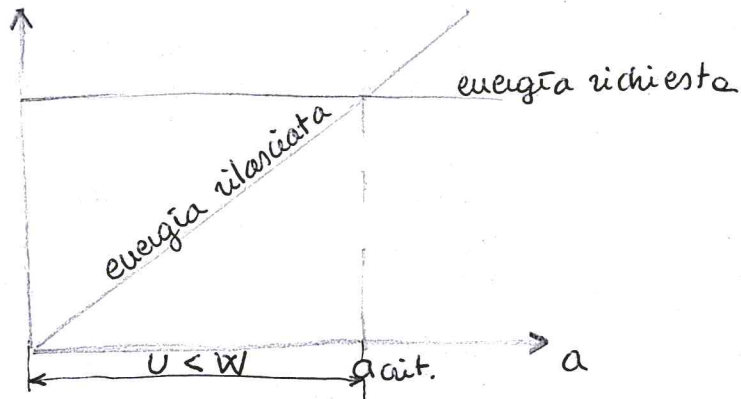
$$4tRda = W$$

esempio di fessura penetrata in una lamina di spessore t sottoposta ad una tensione σ_0 per effetto dell'allungamento da ciascuna delle due parti si ha un assorbimento di energia U (stesso ipotizzando che nella corona circolare ci sia soltanto sforzo normale)

Se $U < W$ (Energia Rilasciata < Energia Richiesta) un aumento istantaneo "da" della lunghezza della cricca, causato per esempio da un'azione esterna, sarebbe sfavorito energeticamente, per cui si richiuderebbe istantaneamente.

Se invece $U > W$ (Energia Rilasciata > Energia Richiesta) la crescita della frattura sarebbe favorita, per cui proseguirebbe fino alla divisione del pezzo in due parti.

Se "a" è piccola a parità di "da" abbiamo che l'energia rilasciata è troppo piccola. Al crescere di "a" l'energia richiesta non varia, ma l'energia rilasciata si:



Quanto vale "a_c"?

$$a_c = \frac{4RE}{\pi\sigma_0^2}$$

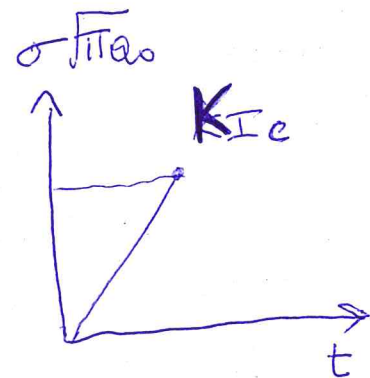
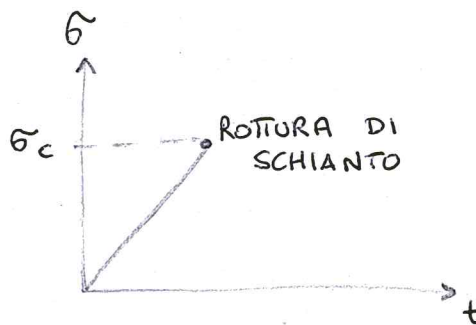
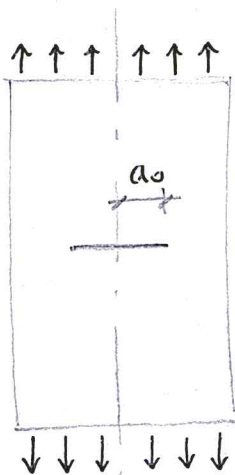
dove R è una costante del materiale.

Al crescere di σ_0 , a_c decresce quindi è più probabile che si raggiunge la condizione $a > a_c$. Man mano che la cricca cresce, aumenta anche l'energia rilasciata quando la cricca aumenta sempre più velocemente.

La condizione necessaria, ossia $U > W$, si scrive :

$$\sigma_c^2 \pi a_0 = 4RE$$

dove $4RE$ è la costante del materiale (dipende solo dal materiale) e a_0 è la lunghezza iniziale.



Per ragioni storiche questa espressione viene scritta prendendo la radice quadrata di entrambi i membri e facendo comparire un fattore numerico:

$$\sigma_c \sqrt{\pi a_0} = \text{costante del materiale} = \text{tenacità alla frattura } K_{IC}$$

σ_c è misurata in corrispondenza della crisi.

$\sigma \sqrt{\pi a_0}$ intesa come variabile si chiama *fattore di intensità degli sforzi*; in questo approccio alla meccanica dei materiali non ci interessa la σ , ma questa strana quantità. Diciamo una σ corretta perché compensiamo in funzione delle larghezze.

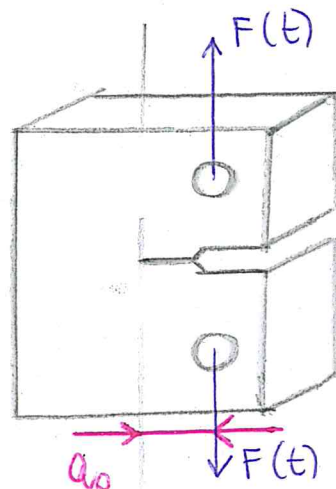
Il materiale si rompe quando il fattore di intensità degli sforzi eguaglia la tenacità alla frattura.

La cricca si crea facendo passare quell'utaglio a v e per cui una serie di acili cui viene sottoposto questo blocchetto si crea la cricca, la cui lunghezza a_0 viene misurata al microscopio. ↓

24) PROVA DI FRATTURA, PROVINO CT

Compact tension

I provini CT hanno forma di parallelepipedo, sono caratterizzati da un intaglio molto acuto che funge da innesco per una cricca di fatica, che viene fatta crescere in condizioni controllate di carico. Quando la lunghezza della cricca è quella desiderata il provino può essere sottoposto alla prova.



Viene utilizzato per le prove di tenacità alla frattura, che possono essere di tre tipi

I

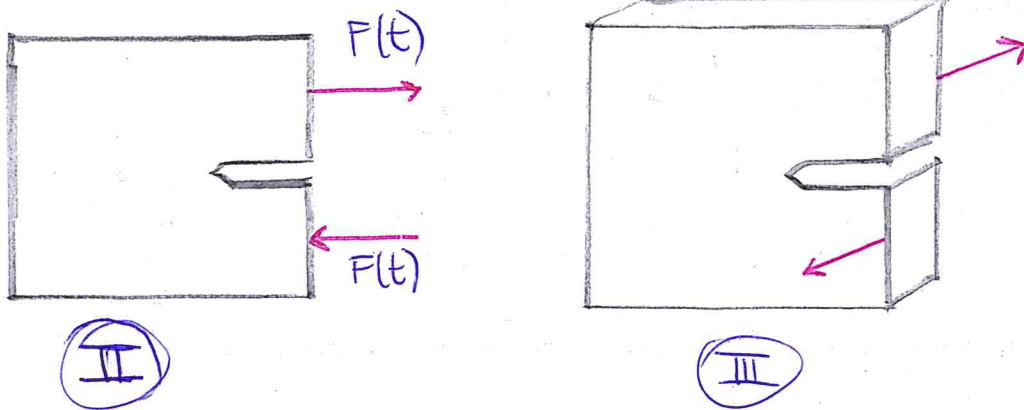
Si ha la rottura quando il fattore di intensità degli sforzi eguaglia la tenacità alla frattura:

$$K_{IC} = \sigma_c(F_c) \sqrt{\pi a_0}$$

25) METODI DI FRATTURA I, II E III

Le prove di tenacità alla frattura possono essere di tre tipi, che prendono i pedici I, II e III. Il pedice I che compare nel simbolo del fattore di intensità degli sforzi e nella tenacità alla frattura si riferisce al primo modo di frattura. Si distinguono quindi il primo modo (quello dell'esempio) in cui la forza agente sull'apice della frattura è normale sia al piano della frattura che all'apice; il modo secondo in cui la forza agente sull'apice della frattura è parallela al piano della frattura ma normale all'apice; il terzo modo in cui la forza agente sull'apice della frattura è parallela all'apice.

K_{IIC} e K_{IIIC} sono più alti di K_{IC} . La rottura si ha una volta raggiunto K_{IC} ; se ci sono particolari vincoli si può arrivare a K_{IIC} , ma noi non li mettiamo.



26) PROPAGAZIONE DELLE CRICCHE DI FATICA – LEGGE DI PARIS

La formazione delle cricche di fatica è ancora un argomento non del tutto compreso; si ritiene che alcuni grani posti sulla superficie del pezzo possano essere in condizioni più sfavorevoli di altri a causa della particolare orientazione del loro reticolo cristallino diventando sede di numerosi movimenti di dislocazioni che portano allo slittamento di interi piani cristallini rispetto ai piani vicini. Questi movimenti provocano delle irregolarità superficiali con formazione di sporgenze e rientranze, nelle quali si origina la cricca per effetto d'intaglio. La durata della fase iniziale (NUCLEAZIONE) non può essere prevista e da ciò nasce la forte dispersione della durata delle prove di fatica, si dice che ha carattere aleatorio-statistico; la fase seguente è detta di PROPAGAZIONE ed è deterministica.

La formazione del microintaglio (nucleazione)

Può essere che la cricca si propaga e c'è una fase di incubazione, la nucleazione, che molto spesso si verifica sulla superficie del pezzo. Supponiamo di avere un cilindro sottoposto a trazione-compressione. In tutti i punti ovunque una σ (sia nel corpo elastico \rightarrow deformazione di tipo reversibile). La reversibilità è dovuta ad uno slittamento dei piani cristallini e non rispetto all'altro; ci possono essere dei cristallini più propensi a deformarsi in maniera irreversibile (perché hanno difetti o per la sua disposizione).



dopo una serie di tensioni e compressioni abbiamo una situazione di questo tipo (questo va a riproporre lo σ_{La} e a favorire la rottura)

se la superficie del materiale non è liscia, due effetti si sovrappongono: l'effetto frattura e l'effetto microscopico di quello che accade nell'intaglio.

Seguendo la tensione compressione non si perde la generalità purché vengano prese in considerazione alla tensione e alla compressione.

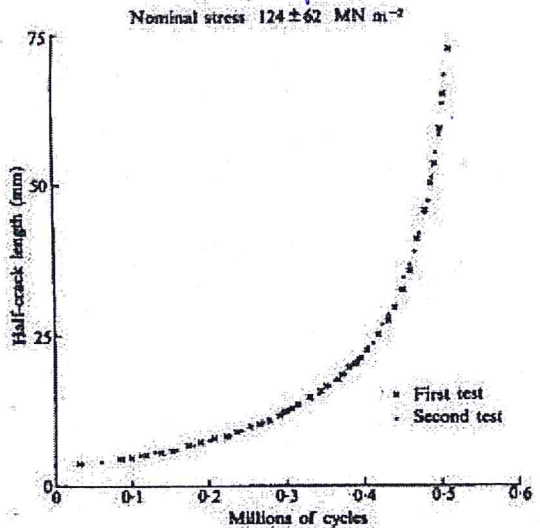


Figura 65: Crescita della cricca di fatica per due provini di acciaio 18/8 austenitico in lastre, testati a 124 ± 62 MPa. Da Frost, 1959.

La propagazione della cricca di fatica è una propagazione stabile. La crescita della cricca è energeticamente sfavorita e può avvenire solo per la presenza di forze esterne variabili, dal lavoro delle quali viene prelevata l'energia necessaria. La cricca in assenza di forze è chiusa; quando le forze sono di trazione si allarga e si arrotonda all'apice senza allungarsi; quando la forza diventa di compressione si richiude allungandosi. Tra le varie leggi proposte per prevedere la crescita di una cricca di fatica, la più semplice è la LEGGE DI PARIS

$$da = \frac{\Delta a}{\Delta N} = c \Delta K^m$$

Dove:

ΔN è un numero abbastanza elevato di cicli

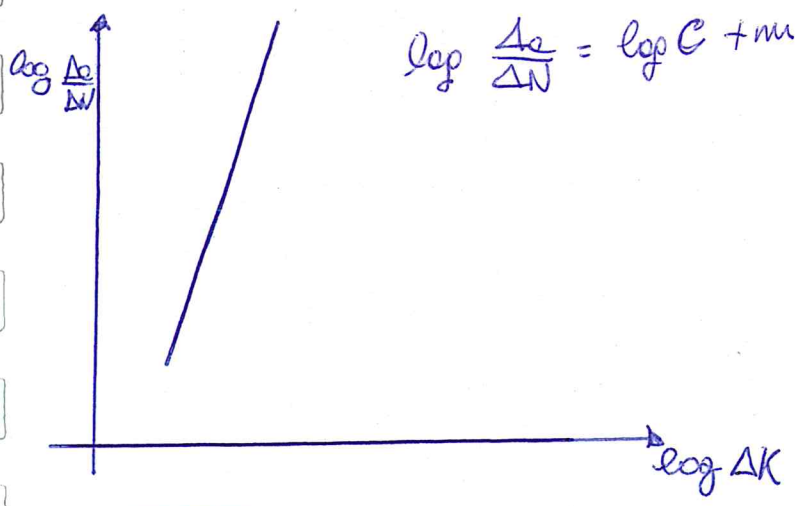
Δa è la crescita della cricca dopo ΔN cicli

ΔK è la variazione del fattore di intensità degli sforzi a causa della sollecitazione di fatica e vale

$$\Delta K = K_{max} - K_{min} = \sigma_{max} \sqrt{\pi a} - \sigma_{min} \sqrt{\pi a} = (\sigma_{max} - \sigma_{min}) \sqrt{\pi a} = \Delta \sigma \sqrt{\pi a}$$

c e m sono costanti dipendenti dal materiale.

Da un punto di vista sperimentale utilizzando provini CT (compact tension) possiamo diagrammare in scala logaritmica il rapporto della crescita della cricca per numero di cicli in funzione della variazione del fattore di intensità degli sforzi e ottenere

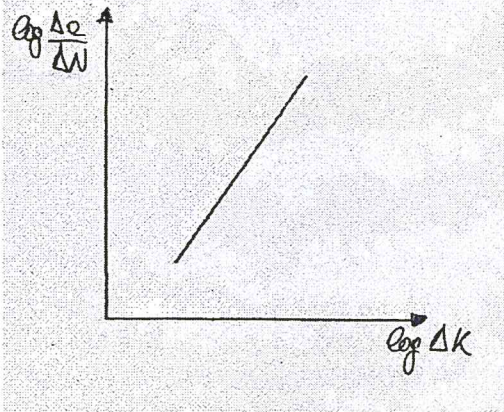
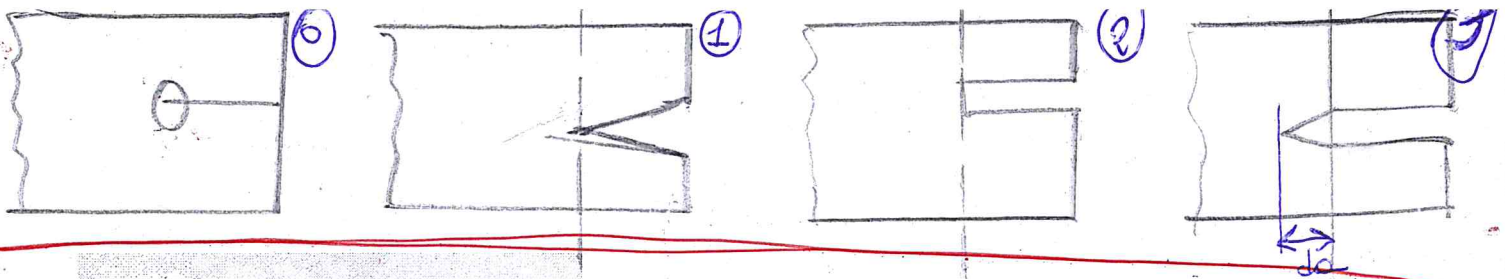


$$\log \frac{\Delta a}{\Delta N} = \log C + m \log \Delta K$$

stesso disegno di dietro

Analizziamo una cricca sottoposta ad una forza sinusoidale: nella prima fase, se non c'è forza, $\sigma = 0$, la cricca è chiusa; con la forza di trazione si allarga e si arrotonda all'apice \rightarrow si forma una zona plastica (deformata in modo irreversibile); infine con la forza di compressione si richiude allungandosi - per cui ciclo si crea un'apice della

L'allungamento da \rightarrow per un ciclo \Rightarrow ad ogni ciclo si crea un'apice della cricca - (VEDI DISEGNI DIETRO)



La crescita stabile della cricca prosegue fino al raggiungimento della condizione di instabilità predetta dalla meccanica della frattura e cioè fino a quando il fattore di intensità degli sforzi non eguaglia la tenacità alla frattura, in seguito si ha la rottura di schianto. La forma più comoda della legge di Paris è

$$\frac{\Delta a}{\Delta N} = A_0 \left(\frac{\Delta K}{\Delta K_0} \right)^m$$

Velocità di propagazione
 $A_0 = 10^{-6}$ mm/ciclo
 e' una costante
 le due costanti
 di numero ΔK_0 e m

Dove ΔK_0 è il valore di ΔK per cui si raggiunge la velocità di propagazione A.

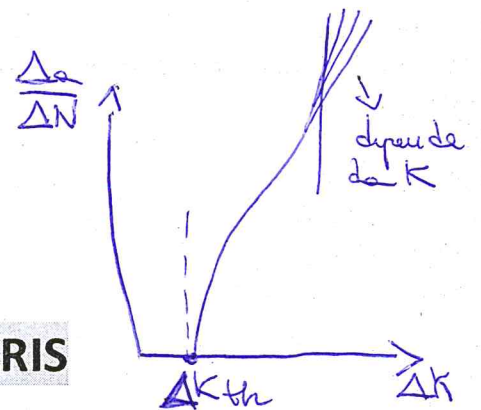
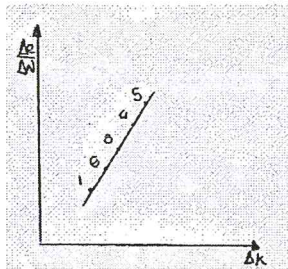
La legge di Paris è una legge deterministica. Vediamo il perché:

immaginiamo di avere un provino CT dove $\sigma_{max} = \sigma_0$, e $\Delta N = 10000$.

Supposto anche che $\Delta \sigma = \text{cost}$ allora $\Delta K = \Delta \sigma \sqrt{\pi a}$ costruiamo questa tabella

ΔN	N	a	Δa	\bar{a}
10000	0	a_0	$a_1 - a_0$	$(a_1 + a_0)/2$
	10000	a_1		
10000	20000	a_2	$a_2 - a_1$	$(a_2 + a_1)/2$
10000	30000	a_3	$a_3 - a_2$	$(a_3 + a_2)/2$

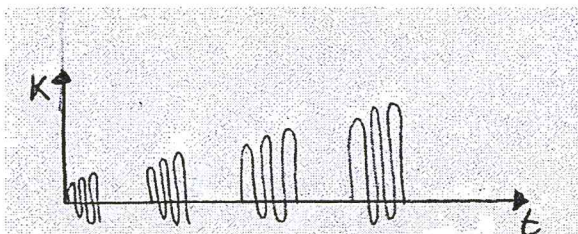
Quindi costruiamo il grafico seguente



I punti sono le diverse condizioni ottenute per lo stesso provino

27) I LIMITI DELLA LEGGE DI PARIS

La legge di Paris ha due limiti, uno superiore e uno inferiore. Quello inferiore non è determinabile in quanto se non si raggiunge un determinato ΔK la cricca pur essendoci non si propaga. Tale valore è detto VALORE DI SOGLIA ΔK_{Th} (di Threshold). Per il limite superiore andiamo a fare il diagramma k-t, avremo allora:



Ogni massimo successivo all'altro sarà di un infinitesimo superiore rispetto al precedente.

Per valori molto grandi di Δk può accadere che il K_{max} sia maggiore del K_{IC} e in questo caso si ha l'inizio della

propagazione instabile con conseguente rottura istantanea del pezzo. La condizione di sicurezza è

$$K_{max} < K_{Ic}$$

Quindi il limite superiore si ottiene quando

$$K_{max} = K_{Ic} = \sigma_{max} \sqrt{\pi a}$$

Ma

$$\Delta K = K_{max} - K_{min} = K_{max} \left(1 - \frac{K_{min}}{K_{max}}\right)$$

Ma

$$\frac{K_{min}}{K_{max}} = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = R$$

Allora

$$\Delta K_{lim} = K_{Ic} (1 - R)$$

E per questo motivo il valore $K_{Ic} (1 - R)$ rappresenta un limite per il Δk .

R = rapporto di tensione.

*quindi il limite superiore dipende da R
→ la curva sopravvive sino a flangere*

28) INTEGRAZIONE LEGGE DI PARIS

La legge di Paris può essere trattata come una ordinaria equazione differenziale se si vuole la legge di crescita della cricca in funzione del numero di *giri. cicli.*

$$\frac{da}{dN} = A_0 \left(\frac{\Delta K}{\Delta K_0}\right)^m = A_0 \frac{(\sigma_{max} - \sigma_{min})^m}{\Delta K_0^m} f^m a^{m/2}$$

Dove f è un fattore numerico che per lastra piana con fessura passante vale $\sqrt{\pi}$, quindi:

$$\frac{da}{dN} = A_0 \left(\frac{\Delta K}{\Delta K_0}\right)^m = A_0 \frac{\Delta \sigma^m}{\Delta K_0^m} \sqrt{(\pi a)^m}$$

Separando le variabili e integrando tra a_0 e a_{lim} a cui corrisponde rispettivamente $N = 0$ e N_{lim} abbiamo

$$dN = N_{lim} = \frac{da}{A_0 \left(\frac{\Delta K}{\Delta K_0}\right)^m} = \frac{da}{A_0 \frac{\Delta \sigma^m}{\Delta K_0^m} \sqrt{(\pi a)^m}} = \frac{da}{A_0 \frac{\Delta \sigma^m}{\Delta K_0^m} \pi^{m/2} a^{m/2}}$$

Questa formula è valida per $m \neq 2$. Nel caso in cui $m = 2$ si passa ai logaritmi e si ottiene

$$N_{lim} = [\ln a]_{a_0}^{a_{lim}} = \ln \frac{a_{lim}}{a_0}$$

Si possono avere i grafici di a in funzione di N (grafico ad andamento esponenziale) e il grafico di $\Delta a / \Delta N$ in funzione di ΔK per il tramite della formula

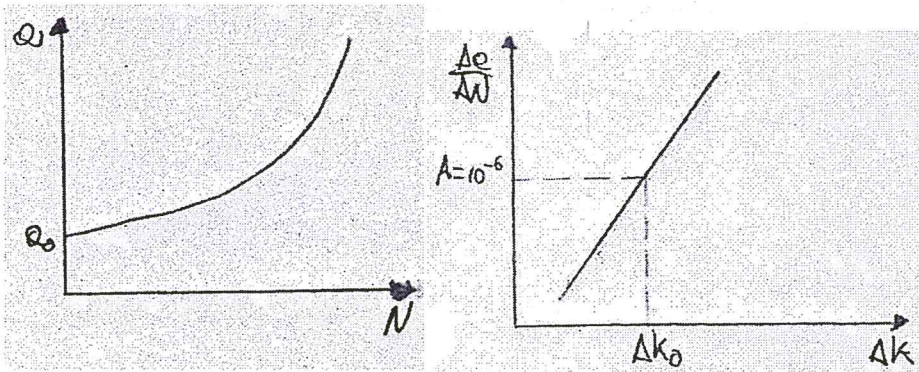
$$\frac{\Delta a}{\Delta N} = A_0 \left(\frac{\Delta K}{\Delta K_0}\right)^m$$

Dove A_0 vale 10^{-6} mm/ciclo (velocità di propagazione).

$$\frac{da}{dN} = c [\Delta \sigma \sqrt{\pi a}]^m = [c (\Delta \sigma)^m \pi^{m/2}] a^{m/2}$$

$$\Rightarrow \frac{da}{a^{m/2}} = dN \Rightarrow \left[\frac{a^{(-\frac{m}{2} + 1)}}{-\frac{m}{2} + 1} \right]_{a_0}^{a_{lim}} = N_{lim} \Rightarrow \left[\ln a \right]_{a_0}^{a_{lim}} = \ln \frac{a_{lim}}{a_0} = N_{lim}$$

Il risultato di questa equazione si approssima un numero in funzione di N e abbiamo un'esponenziale - l'aumento delle curve è sempre questo, esse tendono ad impennarsi.



29) BARRETTA RIGIDA

PREMESSA

La resistenza dei materiali e la teoria dell'elasticità studiano l'equilibrio tra forze interne e forze esterne agenti su un corpo elastico. Questo equilibrio può risultare instabile; alcuni esempi possibili di instabilità sono: pilastri soggetti a compressione; travi inflesse a sezione molto alta e stretta; recipienti premuti dall'esterno; lastre soggette a compressione nel proprio piano. Ricordiamo le seguenti definizioni:

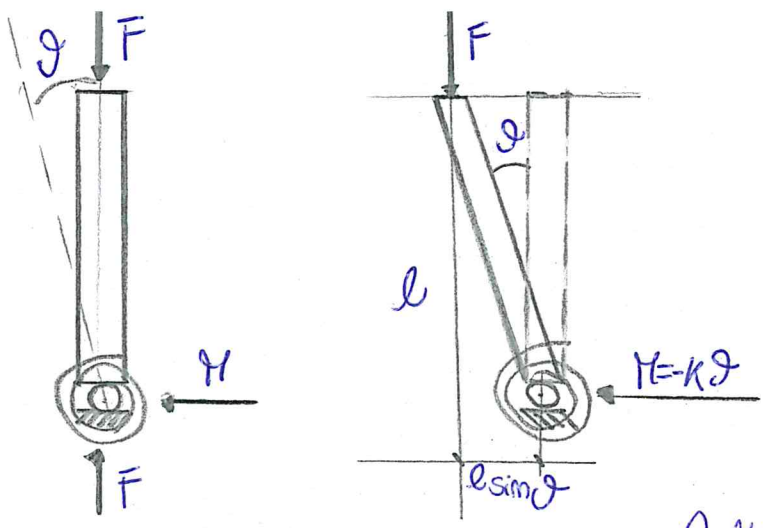
- Una configurazione di equilibrio di un sistema è STABILE se un piccolo allontanamento da essa genera delle forze tendenti a riportare il sistema verso l'equilibrio
- Una configurazione di equilibrio di un sistema è INSTABILE se un piccolo allontanamento da essa genera delle forze tendenti ad allontanare ulteriormente il sistema dall'equilibrio
- Una configurazione di equilibrio di un sistema è INDIFFERENTE se un piccolo allontanamento da essa non genera delle forze aggiuntive, per cui anche la nuova configurazione è di equilibrio.

FINE PREMESSA

Immaginiamo di avere una barretta verticale sottoposta a compressione con due vincoli: una cerniera e una molla. Immaginiamo di far ruotare la barretta di un angolo θ si genererà un momento pari a $M = -k\theta$. Questo momento è un momento che annulla la causa che lo ha generato. Non abbiamo ancora considerato la forza F . Se abbiamo trazione l'equilibrio è sempre stabile, in caso di compressione non possiamo dirlo a priori. In seguito alla rotazione abbiamo:

* Se consideriamo la forza F dobbiamo anche considerare che nella cerniera nasce la reazione vincolare uguale e contraria a F .

* C'è equilibrio stabile se ruotando la barretta di un angolo θ molto piccolo, considerando anche la forza F , l'insieme dei momenti che nascono riportano la barra nella posizione iniziale -



Consideriamo un θ tanto piccolo da rendere valida l'approssimazione $\theta \approx \sin \theta$

Quindi il momento totale sarà pari a $M_{tot} = -k\theta + Fl \sin \theta \approx -k\theta + Fl\theta$

Adesso studiamo il segno del momento, cioè chiediamoci se questo momento è positivo negativo o nullo perché abbiamo

EQUILIBRIO STABILE se $M_{tot} < 0 \Rightarrow F < k/l$ **PRIMA FASE**

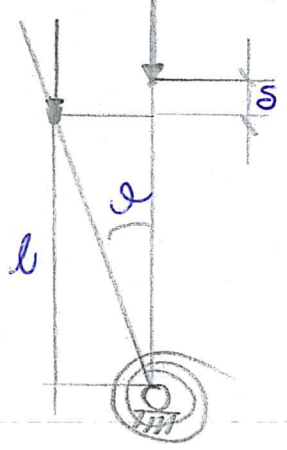
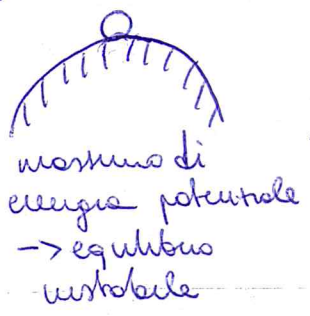
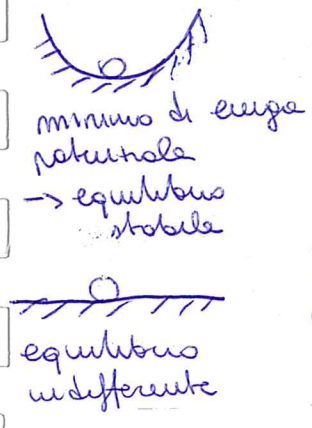
EQUILIBRIO INDIFFERENTE se $M_{tot} = 0 \Rightarrow k/l = F$ **SECONDA FASE**

EQUILIBRIO INSTABILE se $M_{tot} > 0 \Rightarrow F > k/l$ **TERZA FASE**

Inizialmente $F < k/l$ dunque raggiunge il valore critico, superato il quale $F > k/l$ la barretta si oppone nel senso opposto.

La forza che mi dà l'equilibrio indifferente la chiamo FORZA CRITICA. Superato quel valore si procede a instabilità.

Possiamo vedere la stessa barretta considerando la sola energia in gioco.

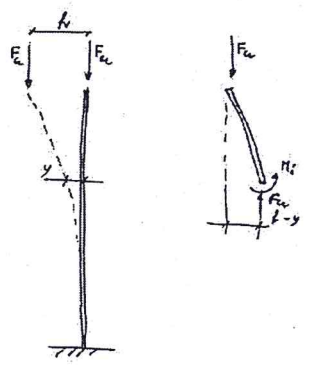


Nella posizione iniziale della barretta $E=0$.

Nella posizione finale abbiamo $E_{molla} = \frac{1}{2} k \theta^2$ e l'energia del peso $E_{peso} = -F(1 - \cos \theta)l$

Se l'energia potenziale nel punto è minima avrò equilibrio stabile, se invece è massima ho equilibrio instabile, se c'è equilibrio tra le forze ho equilibrio indifferente.

Considerando il seguente schema



Se quello fissato è il punto di applicazione della forza nella condizione finale avrò

Energia della molla = $\frac{1}{2} k \theta^2$

Energia del peso = $-F(1 - \cos \theta)l$

L'energia totale sarà pari a

$E_{TOT} = \frac{1}{2} k \theta^2 - F(1 - \cos \theta)l$

Sviluppando in Serie di Mc-Laurinil $\cos \theta$ abbiamo

$$E_{tot} = \frac{1}{2}k\vartheta^2 - Fl \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2}\vartheta^2 \right) \right]$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2}k\vartheta^2 - \frac{1}{2}Fl\vartheta^2$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2}\vartheta^2(k - Fl)$$

quindi l'energia totale è
proporzionale a $(k - Fl)$

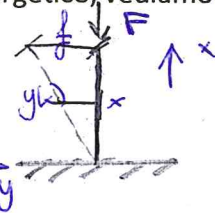
Che risulta essere proporzionale a quello che avevamo trovato precedentemente. Se k prevale su F ($k \gg F$) allora coincide proprio con quello che avevamo scritto prima e l'energia avrà segno positivo, se invece prevale Fl l'energia avrà segno negativo.

↳ c'è diminuzione di energia

↳ c'è un aumento di energia

Per lo studio della stabilità esistono due metodi: il metodo statico e quello energetico, vediamo.

Vogliamo sapere qual è quel valore critico.



30) TRATTAZIONE STATICA

Consideriamo la trave di sopra, di lunghezza l , incastrata al piede e libera alla sommità dove è caricata con una forza di compressione F . Scegliamo un sistema di riferimento con la x che segue la trave (positivo verso l'alto) e la y perpendicolare ad essa (positivo verso sinistra). Si dia alla trave una configurazione deformata spostando lateralmente l'estremo libero. Supponiamo che la nuova condizione sia di equilibrio, questo implica che la configurazione iniziale è di equilibrio indifferente e quindi che la forza F coincida con la forza critica $F = F_{cr}$. L'equazione della deformata sarà

$$y(x) \rightarrow y(l) = f$$

Dove f è la freccia che ovviamente supponiamo essere piccola, ma noi nel disegno abbiamo ingrandito le cose. Ricordiamo che per ogni sezione di trave il momento delle forze interne deve eguagliare il momento delle forze esterne questo risulta essere pari a

$$M_e = F_{cr}(f - y(x))$$

Il momento M_i delle forze interne si può dedurre dalla curvatura y'' dall'espressione

$$\star \text{ curvatura} = \frac{1}{\text{raggio di curvatura}} = \frac{M}{EI} = y'' \rightarrow M_i = EIy''$$

Uguagliando i due momenti abbiamo

$$EIy'' = F_{cr}(f - y)$$

$$EIy'' = F_{cr}f - F_{cr}y$$

$$EIy'' + F_{cr}y = F_{cr}f$$

$$y'' + \frac{F_{cr}}{EI}y = \frac{F_{cr}}{EI}f$$

equazione differenziale del
secondo ordine

Devo far supporre la I:

Imponendo $\alpha^2 = \frac{F_{cr}}{EI}$ si scrive

$$y'' + \alpha^2 y = \alpha^2 f$$

Questa equazione differenziale ha per soluzione la somma di un integrale particolare della completa e dell'integrale dell'omogenea associata.

L'omogenea associata è \rightarrow

$$\star \text{ curvatura} = \frac{y''}{[1 + y'^2]^{3/2}}$$

$$y'' + \alpha^2 y = 0$$

L'integrale dell'omogenea associata è

$$y = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x$$

Per l'integrale particolare della completa scegliamo arbitrariamente $y = f$ allora avremo

$$y = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x + f$$

Fino ad adesso ho considerato la trave libera nello spazio, se adesso andiamo a considerare i vincoli abbiamo che per

$$\boxed{x = 0 \quad y = 0} \rightarrow C_2 = -f$$

Facciamo la derivata prima

$$\cancel{y' = C_1 \alpha \cos \alpha x - C_2 \alpha \sin \alpha x}$$

Ho un incastro quindi imponiamo che la rotazione in O sia nulla così il primo termine scompare e abbiamo

$$y = f - f \cos \alpha x = f(1 - \cos \alpha x)$$

E per

$$\boxed{x = l \quad y = f} \\ y = f(1 - \cos \alpha x) \rightarrow f = f(1 - \cos \alpha l) \\ \rightarrow \cos \alpha l = 0 \rightarrow \alpha l = \frac{\pi}{2}$$

Ma

$$\alpha^2 = \frac{F_{cr}}{EI}$$

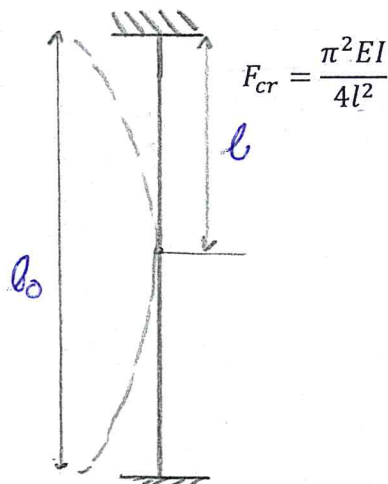
Allora

$$\alpha l = \frac{\pi}{2} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2l} \rightarrow \alpha^2 = \frac{\pi^2}{4l^2}$$

uguagliando le due espressioni di α abbiamo

$$\frac{F_{cr}}{EI} l^2 = \frac{\pi^2}{4}$$

Ricavando la Forza Critica



Detta l_0 la LUNGHEZZA DI LIBERA INFLESSIONE corrispondente alla distanza tra due flessi successivi della linea elastica nel nostro caso possiamo scrivere che

$$l = \frac{l_0}{2} \rightarrow l^2 = \frac{l_0^2}{4} \rightarrow F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2}$$

Questa espressione è detta CARICO EULERIANO per la trave considerata.

Considerazioni: la forza critica dipende dal materiale e dalla geometria, quindi da EI/ρ^2 . Al fine del raggiungimento di ottimizzazione della forza ~~non dobbiamo~~ critica non dobbiamo avere materiali costosi. Per quanto riguarda I dobbiamo vedere la sezione della trave perpendicolarmente al piano del foglio; il minimo I si ha in corrispondenza dell'inflessione, cioè la trave si inflette nel punto in cui I è minimo. Quindi a favore della sicurezza scegliamo l'I minimo. Per definizione il RAGGIO GIRATORE è pari a

$$\rho = \sqrt{I/A} \Rightarrow \rho^2 = I/A \Rightarrow \rho^2 A = I$$

Sostituendo il valore di I nell'espressione della forza critica otteniamo

$$F_{oc} = \frac{\pi^2 E A \rho^2}{\omega^2}$$

Ma la SNELLEZZA è pari a

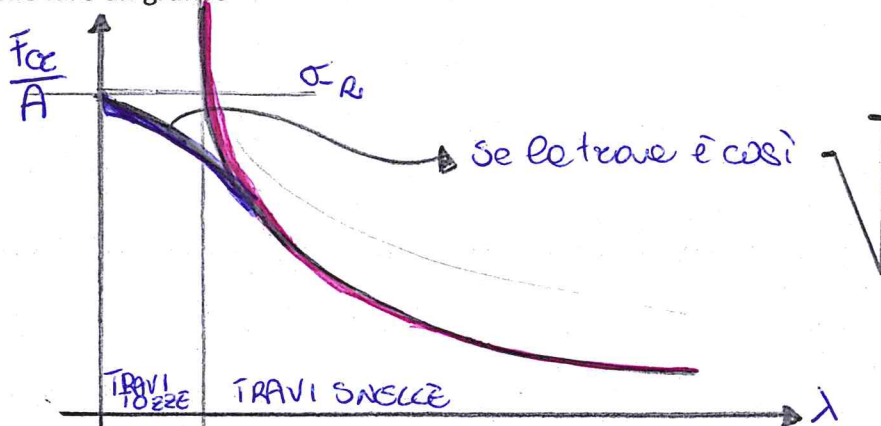
$$\lambda = \omega/\rho$$

E quindi

$$F_{oc} = \frac{\pi^2 E A}{\lambda^2}$$

$$\frac{F_{oc}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

È possibile fare un grafico

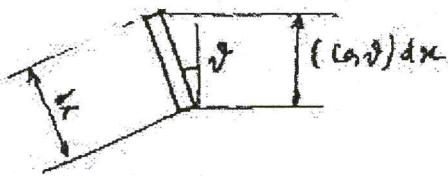


Se la trave è tozza la crisi subentra per snervamento. Se la trave è snella si ha inflessione e la trave si inflette e poi si spezza. Se la forza ha inizialmente una piccola eccentricità la trave si inflette e se la forza è piccola l'eccentricità rimane tale; se la forza cresce l'eccentricità aumenta ed è la causa stessa dell'inflessione.

31) TRATTAZIONE ENERGETICA

PREMESSA

Quando il corpo si sposta dalla condizione di equilibrio si verifica una variazione dell'energia di deformazione



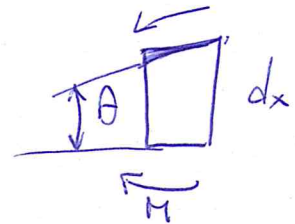
* Il caso dell'equilibrio indifferente è quello che costituisce il confine tra i due casi, per cui la forza esterna corrispondente è proprio quella critica.

elastica e una variazione dell'energia potenziale di posizione delle forze esterne; normalmente alla prima corrisponde un aumento, alla seconda una diminuzione. L'equilibrio risulta stabile, instabile o indifferente a seconda che l'energia totale sia aumentata, diminuita o è rimasta invariata. Infatti se il sistema "corpo deformato più forze esterne" viene spostato di poco dalla configurazione di equilibrio e nella nuova configurazione possiede una energia maggiore, tende a liberarsi di questa energia tornando alla posizione iniziale, per cui in essa l'equilibrio è stabile; se invece possiede nella nuova configurazione una energia minore tende ad allontanarsi ancora di più dalla configurazione di equilibrio per cui questa risulta instabile. Per bassi valori delle forze esterne, la diminuzione della loro energia di posizione non basta a compensare l'aumento di energia interna dovuta alla deformazione imposta, per cui l'equilibrio risulta stabile; per alti valori delle forze esterne la diminuzione della loro energia potenziale è più che sufficiente a compensare l'aumento dell'energia di deformazione, per cui l'energia totale del sistema diminuisce e quindi vi è un surplus di energia liberata che può servire a deformare ulteriormente il corpo allontanandolo così dall'equilibrio, che perciò risulta instabile. *

Se prendiamo un concio di trave si ha che l'energia elastica dU immagazzinata in un concio di lunghezza dx uguale al lavoro delle forze interne vale

$$\theta = \frac{dx}{R} \frac{1}{R} = \frac{M}{EI} \rightarrow \theta = \frac{M}{EI} dx$$

$$dU = \frac{1}{2} M \theta = \frac{1}{2} M \frac{M}{EI} dx$$



E per l'intera trave

$$U = \int_0^l \frac{1}{2} M \frac{M}{EI} dx$$

Ricordando che

~~$$M = F(f-y) \rightarrow M^2 = F^2(f-y)^2$$~~

$$M = F(f-y) \rightarrow M^2 = F^2(f-y)^2$$

Sostituendo in U

~~$$U = \frac{1}{2} \frac{F^2}{EI} \int_0^l (f-y)^2 dx$$~~

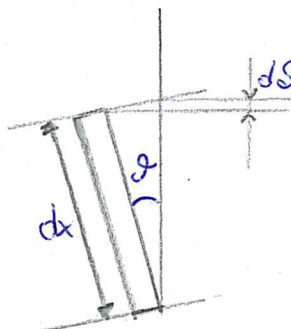
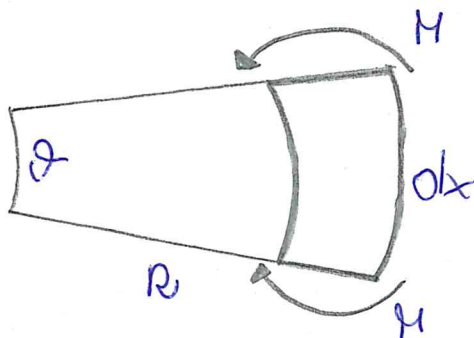
$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} \frac{F^2}{EI} \int_0^l (f-y)^2 dx$$

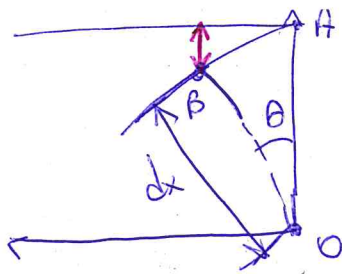
Ma ricordiamo anche che

~~$$\frac{M}{EI} = y'' \rightarrow U = \frac{1}{2} EI \int_0^l (y'')^2 dx$$~~

OK

Il lavoro della forza esterna F è dato dal prodotto della forza per lo spostamento del suo punto di applicazione nella direzione della forza. Lo spostamento è dovuto alla rotazione del concio, che non rimane più verticale pur rimanendo della stessa lunghezza. Per un concio dx inclinato di θ rispetto alla condizione in deformata la variazione di altezza vale





$\overline{OA} = \overline{OB}$ e teneggi conto della compressione
 $\epsilon = F/EA$ $\epsilon = \Delta l/l_0 \Rightarrow \Delta l = -\epsilon l_0 = -l_0 F/EA$
 accorciamento imposto uniformemente; a causa della forza
 F la trave si comprime e il suo estremo si sposta in A
 che considero punto iniziale -
 $d\delta = (1 - \cos \theta) dx = \frac{\theta^2}{2} dx = \frac{(y')^2}{2} dx$ (No)

E per tutta la trave

$$\delta = \int_0^l \frac{(y')^2}{2} dx \quad (\text{No})$$

Allo compressione segue
 la flessione; la lunghezza
 OA resta invariata
 ma si distribuisce
 sulle curve OB.

Dove θ è l'arcotangente della pendenza. Il lavoro delle forze esterne sarà

$$W = F\delta = F \int_0^l \frac{(y')^2}{2} dx$$

Se i due lavori sono uguali significa che siamo in condizioni di equilibrio indifferente e quindi la forza esterna è quella critica. Andiamo ad eguagliare i due lavori

$$\frac{1}{2} \frac{F_{cr}^2}{EI} \int_0^l (f - y)^2 dx = F_{cr} \int_0^l \frac{(y')^2}{2} dx$$

Allora

$$F_{cr} = \frac{\int_0^l (y')^2 dx}{\int_0^l (f - y)^2 dx} EI$$

Questa formula è esatta solo se la $y(x)$ è quella effettiva. Tuttavia si dimostra che la forza critica è minima quando la $y(x)$ è quella effettiva; per cui se si dà ad $y(x)$ una forma simile a quella effettiva si ottiene un valore della forza critica sicuramente maggiore di quella vera, ma non molto discosta da essa. Il metodo più sicuro che ho per trovare una funzione che è la mia incognita è il metodo di sviluppabilità in serie di Fourier, se sviluppassi in serie di Taylor invece avrei un polinomio. La limitazione che ho sulla y è che sia compatibile con i vincoli.

Quello che abbiamo fatto è una uguaglianza tra il lavoro delle forze esterne e il lavoro delle forze interne facendo delle approssimazioni. Se facciamo il modello dello spostamento questo ci fornirà lo spostamento in maniera approssimata e quanto più opportunamente sceglieremo il modello tanto più questo sarà verosimile alla realtà. Se $y = \frac{f}{l^2} x^2$ la mia F_{cr} è la minima.

32) METODO OMÈGA

Supponiamo di avere una forza normale N.

Il grado di sicurezza vale

$$s = \frac{\sigma_{-R}}{\sigma} = \frac{\sigma_{-R}}{N/A} \quad \text{travi tozze}$$

$$s = \frac{F_{cr}}{N} = \frac{\pi^2 EI/l_0^2}{N} \quad \text{travi snelle}$$

Ricordando che ρ è il raggio giratore e l_0/ρ è la snellezza e si indica con λ , possiamo scrivere

$$\lambda = \frac{l_0}{\rho} \rightarrow l_0 = \lambda \rho \rightarrow l_0^2 = \rho^2 \lambda^2 = \frac{I}{A} \lambda^2$$

moltiplica e
diviso per
 σ_{-R} ed h_0

Sostituendo in s, abbiamo

$$s = \frac{\pi^2 EI / (I/A) \lambda^2}{N} = \frac{\pi^2 E / \lambda^2}{N/A} = \frac{\sigma_{-R} \pi^2 E}{N/A \sigma_{-R} \lambda^2} = \frac{\sigma_{-R}}{N/A \omega}$$

con $\frac{1}{\omega} = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{-R} \lambda^2}$

Quindi ω varrà

$$\omega = 1 \text{ per le travi tozze}$$

$$\omega = \frac{\sigma_{-R} \lambda^2}{\pi^2 E} \text{ per le travi snelle}$$

Per le costruzioni in acciaio generalmente $\lambda \leq 200$ ed esistono tabelle che ci riportano i valori di ω in funzione di λ .

λ	ω
20	1.17
40	1.36
60	1.61
100	2.89
200	11.58

per pilastri in
cemento armato \rightarrow

$\lambda \leq 50$	$\omega = 1$
$\lambda = 60$	$\omega = 1.04$
$\lambda = 80$	$\omega = 1.24$
$\lambda = 100$	$\omega = 1.62$

33) METODO DEGLI ELEMENTI FINITI - MODELLO DI SPOSTAMENTO E FUNZIONI DI FORMA

PREMESSA

Il problema dell'equilibrio elastico si propone di trovare le soluzioni di un complesso sistema di equazioni differenziali e algebriche: 3 equazioni indefinite dell'equilibrio; 6 equazioni di congruenza (di cui solo 3 differenzialmente indipendenti); 6 equazioni di Navier (che esprimono la legge di Hooke) con le relative condizioni ai limiti, note come equazioni di Cauchy e di vincolo. Quindi abbiamo 12 equazioni di 12 incognite che sono le componenti speciali di tensione e di deformazione. La difficoltà del problema sta nella forma del dominio elastico, cioè del corpo in cui si cerca di risolvere il problema. Qualche semplificazione del problema è possibile ma la tendenza attuale è quella di risolverlo attraverso l'applicazione del principio dei lavori virtuali, calcolando però lo spostamento in modo approssimato. Questo è l'approccio del metodo degli elementi finiti.

Un punto che in un certo tempo si trova nella posizione (x, y, z) dopo un arco di tempo passa in una posizione diversa $(x_{fin}, y_{fin}, z_{fin})$; lo spostamento sarà dato dalla differenza delle componenti e si può esprimere come un vettore \vec{s} di componenti u, v, w funzioni delle coordinate x, y, z .

Tutto il metodo degli elementi finiti si basa su opportuni postulati per approssimare la funzione s.

* Il primo postulato è che lo spostamento sia funzione di x, y, z ma anche degli spostamenti di un certo numero di punti scelti detti NODI. Quindi

$$u = u(x, y, z, u_1, v_1, z_1, \dots, u_n, v_n, w_n)$$

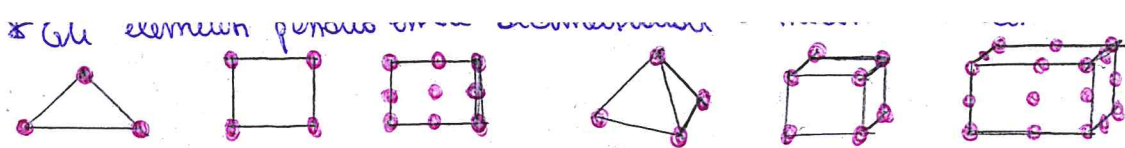
Analogamente per v e w.

Si postula inoltre che la dipendenza dai parametri $u_1, v_1, z_1, \dots, u_n, v_n, w_n$ sia lineare, e che si possa porre nella forma

$$s = Nq$$

Dove q è il vettore colonna le cui componenti sono $u_1, v_1, z_1, \dots, u_n, v_n, w_n$.

* Allo spostamento sostituiamo un modello di spostamento - Definiamo lo spostamento in pochi punti, detti nodi, che sono punti e caso in cui definiamo lo spostamento e quindi possiamo definire il vettore $q = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$



L'ultimo postulato ammette che la dipendenza lineare di u, v, w dalle componenti di q sia effettiva (abbia cioè coefficienti diversi da zero) solo per i nodi sufficientemente vicini al punto P; vado cioè a considerare i nodi che appartengono allo stesso elemento cui appartiene il punto P.

FINE PREMESSA

Il metodo degli elementi finiti può essere così schematizzato:

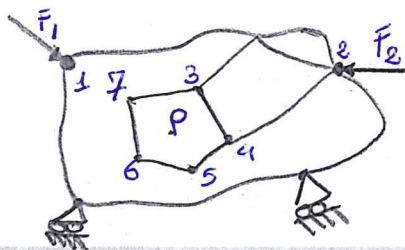
1. Si suddivide la struttura in ELEMENTI di forma opportuna collegati tra loro in punti detti nodi; gli elementi possono avere la stessa dimensione della struttura, o una dimensione inferiore.

2. Si adotta un opportuno MODELLO DI SPOSTAMENTO cioè si ipotizza che lo spostamento $s(P)$ in ogni punto P di un elemento sia funzione lineare dei soli spostamenti dei nodi appartenenti all'elemento. Lo spostamento $s(P)$ dipende comunque anche dalle COORDINATE dei nodi dell'elemento e questa dipendenza non è lineare. Lo spostamento è una funzione vettoriale $s(x, y, z)$. Nel caso tridimensionale si pone

$$s(x, y, z) = \begin{pmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{pmatrix} = N(x, y, z)q$$

Con N matrice delle FUNZIONI DI FORMA e q è il vettore degli spostamenti nodali definito prima. *Le righe di N sono 3 e le colonne sono $3 \times$ il numero di nodi dell'elemento.*

Il vettore q ha una dimensione molto grande e quasi tutti gli elementi della matrice N sono nulli ad eccezione dei nodi interessati. Spesso il vettore q e la matrice N vengono riferite ai solo gradi di libertà dell'elemento.



34) DALLE FUNZIONI DI FORMA ALLA MATRICE DI RIGIDEZZA

3. Scriviamo per ciascun elemento le espressioni delle deformazioni e delle tensioni in funzione degli spostamenti. Posto

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

Si ha

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)), & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)), & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)), & \gamma_{xz} &= \frac{1}{G} \tau_{xz} \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}$$

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \Delta s = \Delta N^{(e)} q = B^{(e)} q$$

la (e) indica che N e B sono diverse per ogni elemento mentre q è uguale per tutti.

Dove $B^{(e)}$ sono le derivate parziali delle funzioni di forma. Per la legge di Hooke

$$\sigma = D \epsilon$$

In cui D contiene le costanti elastiche del materiale.

Le espressioni scritte valgono nell'ambito dell'elemento considerato perché solo lì le funzioni di forma danno un'approssimazione sufficiente.

4* Scriviamo l'espressione dell'energia W di deformazione elastica che è uguale al lavoro delle forze esterne nodali f

$$W = \frac{1}{2} \sum_e \int_{V_e} \epsilon^T \sigma dV$$

Dove la sommatoria è estesa a tutti gli elementi e l'integrale è fatto all'interno di ciascun elemento da cui

$$\begin{aligned} \sigma &= D \epsilon \rightarrow \sigma = D B q \\ \epsilon &= B q \rightarrow \epsilon^T = B^T q^T \end{aligned}$$

E quindi

$$W = \frac{1}{2} \sum_e \int_{V_e} B^T q^T D B q dV$$

I vettori q^T e q si possono portare fuori il segno di integrale e fuori dal segno di sommatoria perché li ho definiti costanti per le forze interne

$$W = \frac{1}{2} q^T \left[\sum_e \int_{V_e} B^T D B dV \right] q$$

E possiamo scrivere che

$$\int_{V_e} B^T D B dV = K^{(e)}$$

E quindi

$$W = \frac{1}{2} q^T K^{(e)} q$$

Dove $K^{(e)}$ è detta MATRICE DI RIGIDEZZA ed ha una notevole interpretazione: se tutti i gradi di libertà vengono bloccati tranne quello i -esimo e a questo si impone uno spostamento unitario, la reazione del vincolo j -esimo è proprio K_{ij} a meno del segno.

* Caratteristica di carattere energetico: il potenziale elastico è dato in ciascun punto da ϵ trasportato per σ . Perché punto per punto sappiamo definire il tensore degli sforzi e della deformazione, allora punto per punto sappiamo definire il potenziale elastico $\phi = \frac{1}{2} \sigma \epsilon^T = \frac{1}{2} \epsilon^T \sigma$. Ma ora serve l'energia di tutto il corpo - Facciamo l'integrale per ogni elemento e poi la sommatoria.

CONSIDERAZIONI

La matrice $K^{(e)}$ è simmetrica. Per quanto riguarda il suo significato fisico ricordiamo che

$$\frac{1}{2} q^T K q$$

È il lavoro delle forze interne e possiamo interpretare Kq come la forza interna che moltiplicata per q^T restituisce il lavoro a meno del fattore $1/2$.

Per quanto riguarda le forze esterne invece, le consideriamo concentrate e insistenti sui nodi e arbitrariamente quindi porrò i nodi in corrispondenza dei punti di applicazione delle forze. Se la forza dovesse essere distribuita la scomporrò in tante forze concentrate. Avrò un vettore di forze fatto in questo modo

$$\begin{pmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{1z} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ \vdots \end{pmatrix} = \frac{1}{2} q^T f$$

Dato che deve sussistere l'uguaglianza tra il lavoro delle forze interne e quello delle forze esterne vado ad eguagliare

$$\frac{1}{2} q^T K^{(e)} q = \frac{1}{2} q^T f$$

E ottengo

$$f = K^{(e)} q$$

Che è l'EQUAZIONE FONDAMENTALE DEL METODO DEGLI ELEMENTI FINITI dove f è il vettore delle forze nodali ed è noto; la matrice $K^{(e)}$ è la matrice di rigidità e q è il vettore di spostamenti nodali che è incognito.

$$\Rightarrow q = K^{-1} f$$

35) I RECIPIENTI – GEOMETRIA DIFFERENZIALE DEI RECIPIENTI DI ROTAZIONE. TEOREMA DI MEUSNIER

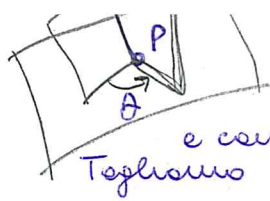
Una superficie di rivoluzione si ottiene facendo ruotare una curva qualsiasi, detta GENERATRICE, intorno ad una retta detta ASSE. La sezione della superficie con un piano contenente l'asse è detto MERIDIANO. Nella pratica il meridiano coincide con la generatrice ma in alcuni casi ciò non è vero (vedi iperboloidi a una falda). Dato che il meridiano può fungere benissimo da generatrice, si intuisce che l'intera superficie è determinata dalla forma del meridiano. Nei recipienti di rivoluzione, in quanto membranali, lo stato di tensione è piano e una delle direzioni principali è la perpendicolare alla superficie e l'altra, in base alle considerazioni di simmetria è quella meridiana e la terza, perpendicolare ad entrambe, è detta NORMALE.

Definiamo:

- r_p il raggio di curvatura del parallelo che è la distanza tra il punto considerato e l'asse

Come si calcola la curvatura di una curva piana? Con la circonferenza osculatrice. Prendiamo tre punti P_1 e P_2 tendenti a P , cioè non in un intorno di P . Per questi tre punti passa una circonferenza. La circonferenza osculatrice è quella limite, cioè quella passante per il limite di P_1 e P_2 che tendono a P . Il centro della circonferenza osculatrice C_1 è il centro di curvatura. Il raggio del centro osculatore è

Curvatura principale:

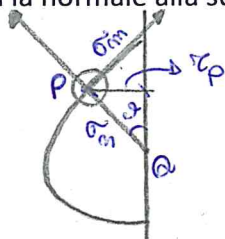


di curvatura principale in un punto
 concubano con le direzioni principali di curvatura
 Prendiamo una superficie curva qualsivoglia
 e consideriamo la normale alla superficie.
 Troviamo la superficie col fuoco di punti di curvatura

- r_m il raggio di curvatura del meridiano che si ottiene come raggio del cerchio osculatore al meridiano in quel punto
- r_n il raggio di curvatura della normale che si ottiene prolungando la normale alla superficie fino ad incontrare l'asse e vale

$$r_n = \frac{r_p}{\sin \theta}$$

questa ultima relazione scritta è il TEOREMA DI MEUSNIER DE LA PLACE. L'angolo θ è detto COLATITUDINE ed è l'angolo che si forma tra la normale alla superficie e l'asse di simmetria.



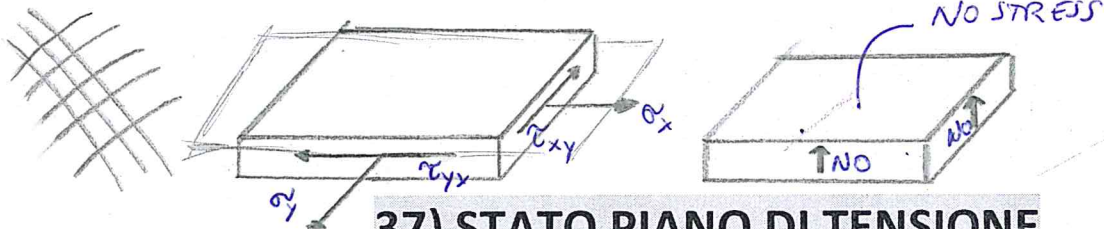
σ_m DIREZIONE MERIDIANA
 σ_n DIREZIONE NORMALE

36. ELEMENTINO DI MEMBRANA

Studiando gli organi destinati a contenere fluidi, normalmente pressurizzati, si parla di RECIPIENTE se il diametro è grande rispetto alla lunghezza, di TUBAZIONE se la lunghezza è molto maggiore del diametro. I recipienti a parete sottile sono quelli in cui spessore è sufficientemente più piccolo del diametro. Sono studiati nell'approssimazione membranale che consiste nel trascurare la componente radiale della tensione, nonché degli sforzi flessionali. La teoria delle membrane si basa su questi due postulati:

- Non ci sono sforzi normali σ su elementini di superficie paralleli al piano medio della membrana, questo esclude la componente radiale della tensione
- Non ci sono sforzi tangenziali diretti normalmente alla superficie media, su elementini di superficie normali al piano medio della membrana, cioè sulle sezioni radiali. Questo esclude il taglio e di conseguenza anche la flessione. Sono invece consentiti sforzi tangenziali diretti parallelamente al piano medio della membrana.

* La membrana può essere allora considerata come un tessuto di fili flessibili e inestensibili posti perpendicolarmente gli uni agli altri. La direzione delle due famiglie di fili che per definizione non si scambiano sforzi tangenziali risulta da determinare.



37) STATO PIANO DI TENSIONE

Per il primo postulato una membrana non può resistere alle forze perpendicolari al proprio piano se non in virtù della sua forma; cioè una membrana piana non può resistere a tali sforzi ma può farlo solo una membrana curva. Una conseguenza di ciò è che lo stato di tensione in una membrana è bidimensionale e che uno degli assi principali è la normale alla superficie. Un cubetto, tagliato nello

* La membrana è una superficie che sopporta le trazioni in tutte le direzioni ma non sopporta le compressioni, la flessione e i carichi laterali.

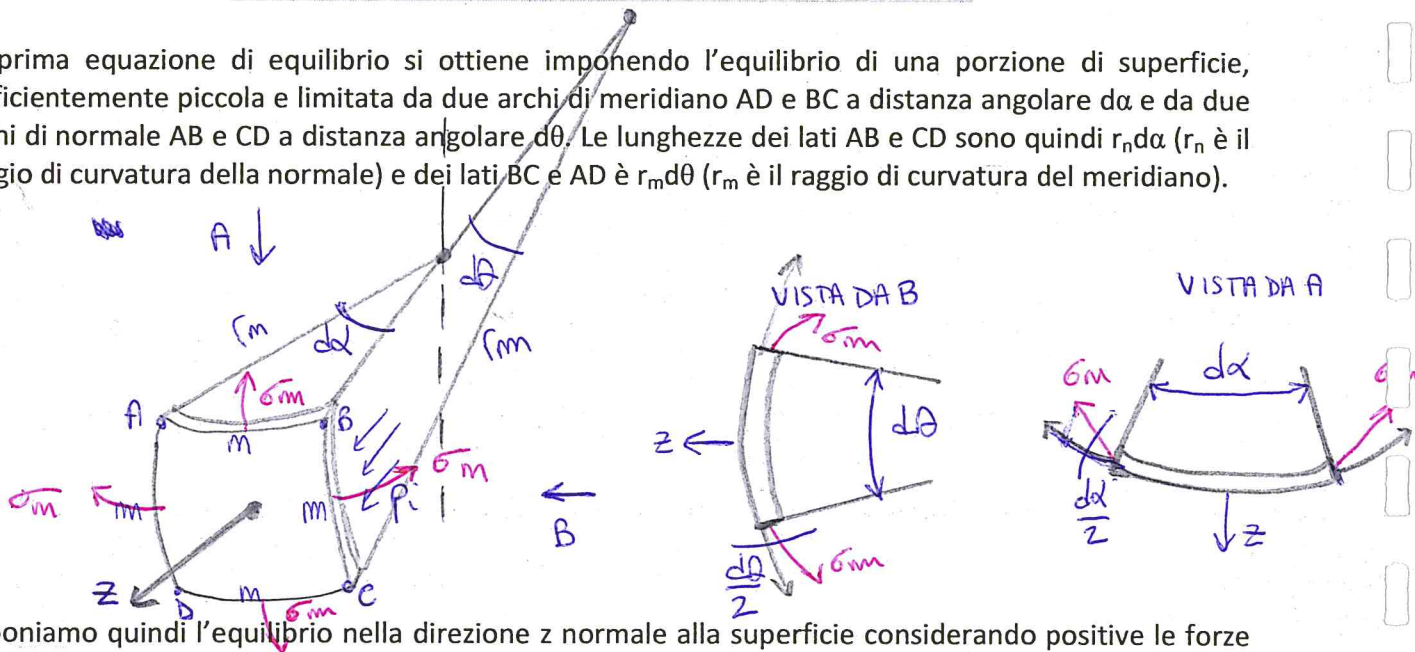
spessore della membrana tale che due sue facce siano parallele al piano medio della membrana non ha

- Sforzo normale perché tale componente sarebbe radiale e si trascura per il primo postulato;
- Sforzi tangenziali perché per simmetria questi si ritroverebbero sulle sezioni radiali della membrana in direzione radiale dove non possono esserci per il secondo postulato.

La stessa cosa può essere vista direttamente dai due postulati: entrambi escludono ogni componente della tensione perpendicolare al piano medio e quindi affermano che tutte le componenti delle tensioni devono giacere nel piano medio che diventa PIANO DELLE TENSIONI e quindi per definizione lo stato tensionale è piano.

38) EQUILIBRIO LOCALE (LAPLACE)

La prima equazione di equilibrio si ottiene imponendo l'equilibrio di una porzione di superficie, sufficientemente piccola e limitata da due archi di meridiano AD e BC a distanza angolare $d\alpha$ e da due archi di normale AB e CD a distanza angolare $d\theta$. Le lunghezze dei lati AB e CD sono quindi $r_n d\alpha$ (r_n è il raggio di curvatura della normale) e dei lati BC e AD è $r_m d\theta$ (r_m è il raggio di curvatura del meridiano).



Imponiamo quindi l'equilibrio nella direzione z normale alla superficie considerando positive le forze dirette verso l'esterno. Si ha perciò:

forze di pressione: $(p_i - p_e) r_n d\alpha r_m d\theta$

forze agenti sui lati meridiani BC e AD: sui due meridiani agiscono solo forze normali σ_n perché la perpendicolare al meridiano, cioè la normale, è una direzione principale; inoltre queste forze sono rivolte verso l'interno, quindi ne segue il segno meno. Si trascura inoltre, data la piccolezza dell'elemento, la differenza tra le tensioni agenti sui due lati opposti e la differenza delle lunghezze dei medesimi lati. Si ha quindi:

$$-2\sigma_n r_m d\theta \sin(d\alpha/2)$$

forze agenti sui lati normali AB e CD: si ragiona in modo analogo a prima e si ha:

$$-2\sigma_m r_n d\alpha \sin(d\theta/2)$$

Sommando i tre contributi, sostituendo al seno degli angoli piccoli il valore dell'argomento e dividendo per i fattori comuni $d\alpha$ e $d\theta$ si ha:

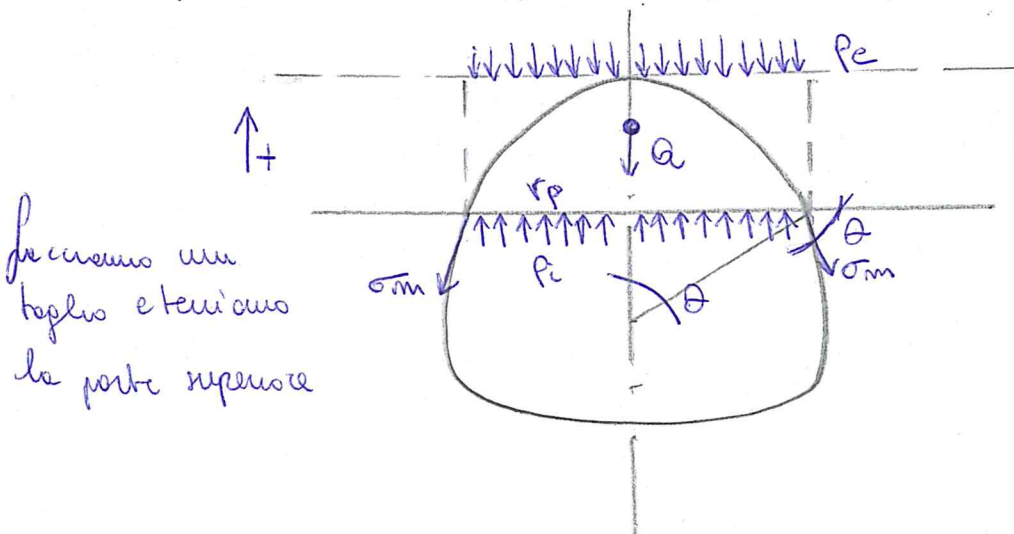
$$(p_i - p_e) r_n r_m - \sigma_n r_m s - \sigma_m r_n s = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_n}{r_n} + \frac{\sigma_m}{r_m} = \frac{(p_i - p_e)}{s} \quad (1)$$

Quest'ultima è detta *equazione di Laplace*. Abbiamo due incognite ed una sola equazione. Dobbiamo trovarne un'altra.

39) EQUILIBRIO GLOBALE (σ_m)

La seconda equazione si ottiene come equilibrio di una porzione di superficie contenente un polo:



per cui:

$$\sigma_m \sin\theta 2\pi r_p s = (p_i - p_e) \pi r_p^2 - Q$$

dove r_p è il raggio di curvatura del parallelo e Q è la forza peso del recipiente e del fluido contenuto nel volume di controllo. Di solito il peso del recipiente si trascura e si considera solo quello del liquido. Semplificando e ricordando che $r_n = r_p / \sin\theta$ si ha:

$$\sigma_m = \frac{(p_i - p_e) r_n}{2s} - \frac{Q}{2\pi r_p s \sin\theta}$$

Se la pressione esterna è quella atmosferica si pone $p_e = 0$ misurando la p_i come pressione relativa. Se il fluido è un gas si può trascurare il secondo addendo al secondo membro; quindi se il recipiente è per gas si trascurano il peso del fluido e quello del recipiente:

$$\sigma_m = \frac{(p_i - p_e)r_n}{2s} \quad (2)$$

Quest'ultima è l'equazione di equilibrio globale.

Abbiamo ottenuto così due equazioni in due incognite.

40) RECIPIENTE CILINDRICO

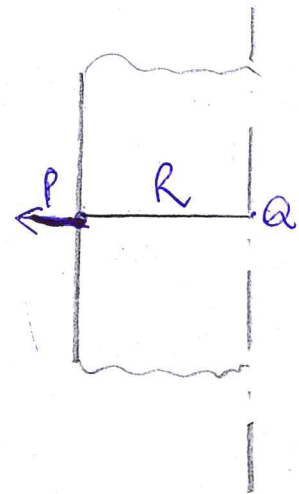
In questo caso $r_m = \infty$ e $r_n = R$ e le equazioni (1) e (2) sono disaccoppiate, quindi possono essere risolte separatamente. Ragioniamo in termini di pressione relativa, quindi $(p_i - p_e) = p$. Dalla (2) otteniamo:

$$\sigma_m = \frac{pR}{2s}$$

e sostituendo nella (1):

$$\frac{p}{s} = \frac{pR}{2sr_m} + \frac{\sigma_n}{R}$$

$$\Rightarrow \sigma_n = \frac{pR}{2s} \quad (\text{legge delle caldaie})$$



41. RECIPIENTE SFERICO

In questo caso $r_m = r_n = R$, per cui dalla (2):

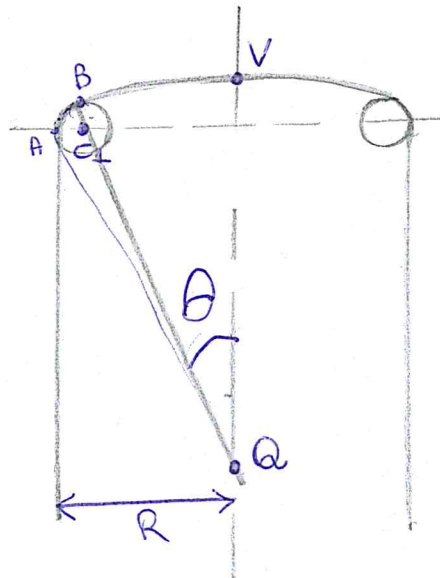
$$\sigma_m = \frac{pR}{2s}$$

e sostituendo nella (1):

$$\sigma_n = \frac{pR}{2s}$$

per cui $\sigma_m = \sigma_n$, cosa che del resto si poteva prevedere anche per considerazioni di simmetria.

42) FONDO TOROSFERICO



Il fondo di un cilindro non è piano, ma bombato. Infatti la membrana funziona soltanto se è curva. Per chiudere il recipiente usiamo quindi il fondo torosferico.

Prendiamo il punto B a sentimento (tipo 60°) (di solito la distanza BQ viene posta uguale a $2R$). Passando poi per C_1 troviamo Q e con il raggio BQ descriviamo il fondo. Le due circonferenze piccole sono invece la sezione di un toro.

Detti r il raggio del cerchio osculatore, R il raggio del cilindro e $R_{sf} = BQ$, cioè il raggio della sfera, si ha:

$$\sigma_m = \frac{pr_n}{2s} \begin{cases} \text{sfera} = \frac{pR_{sf}}{2s} \\ \text{cilindro} = \frac{pR}{2s} \\ \text{toro} = \frac{pr_n(\theta)}{2s} \end{cases}$$

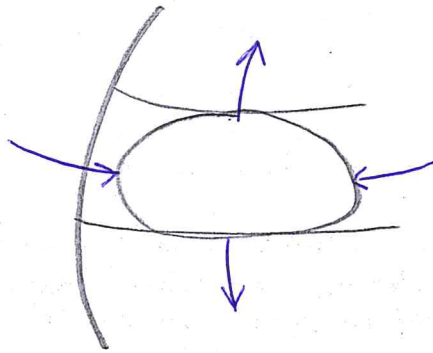
$$\sigma_n = \begin{cases} \text{sfera} = \frac{pR_{sf}}{2s} \\ \text{cilindro} = \frac{pR}{s} \\ \text{toro} \end{cases}$$

Per quella del toro applichiamo Laplace:

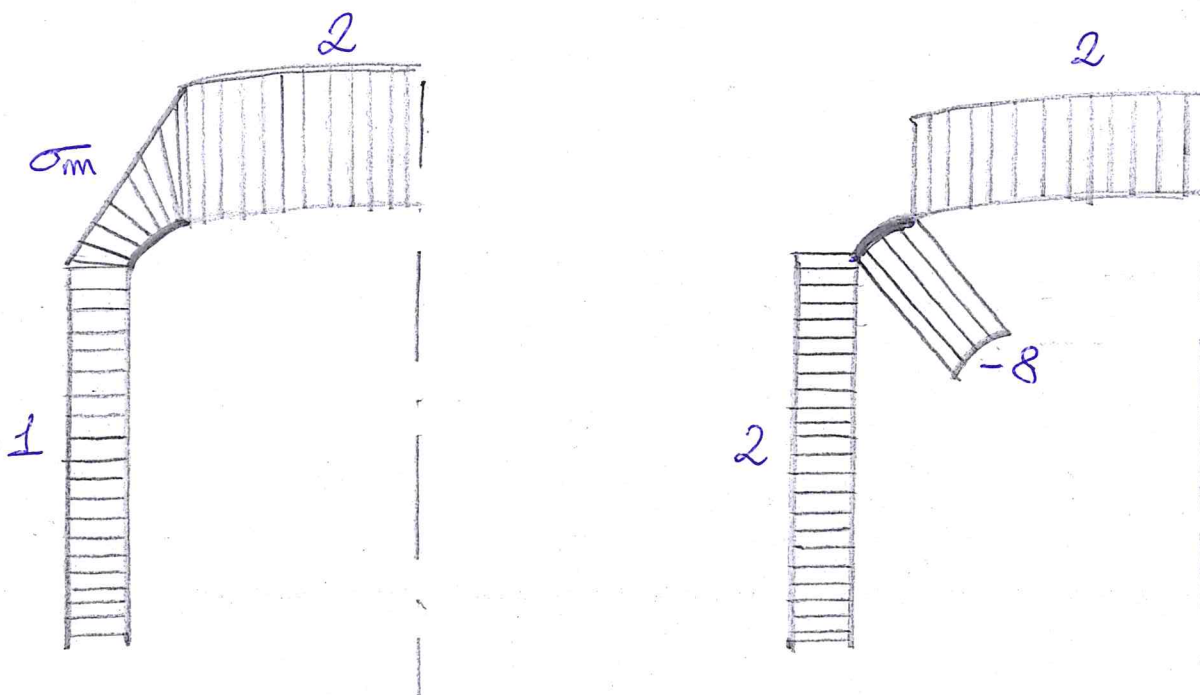
$$\frac{p}{s} = \frac{\sigma_m}{r} + \frac{\sigma_n}{r_n} \Rightarrow \frac{p}{s} = \frac{pr_n}{2sr} + \frac{\sigma_n}{r_n}$$

$$\sigma_n = \frac{pr_n}{s} - \frac{pr_n^2}{2rs} = \frac{pr_n}{s} \left(1 - \frac{r_n}{2r}\right) = \frac{pr_n}{2s} \left(2 - \frac{r_n}{r}\right)$$

Il problema è che $r_n/r > 2$. Il segno meno indica una compressione. Il caso è paradossale. Si crea una rientranza. La situazione è pericolosissima.



L'ingegnere si attiene a dei proporzionamenti dettati dalla normativa, che impone che $r_n/r < 10$.
 Infine possiamo fare un diagramma della σ_n e della σ_m in funzione dell'ascissa curvilinea:



La discontinuità nel diagramma della σ_n sta nel fatto che trascuriamo la flessione nella membrana, ma questo non è un problema. L'unico problema resta quel segno meno.

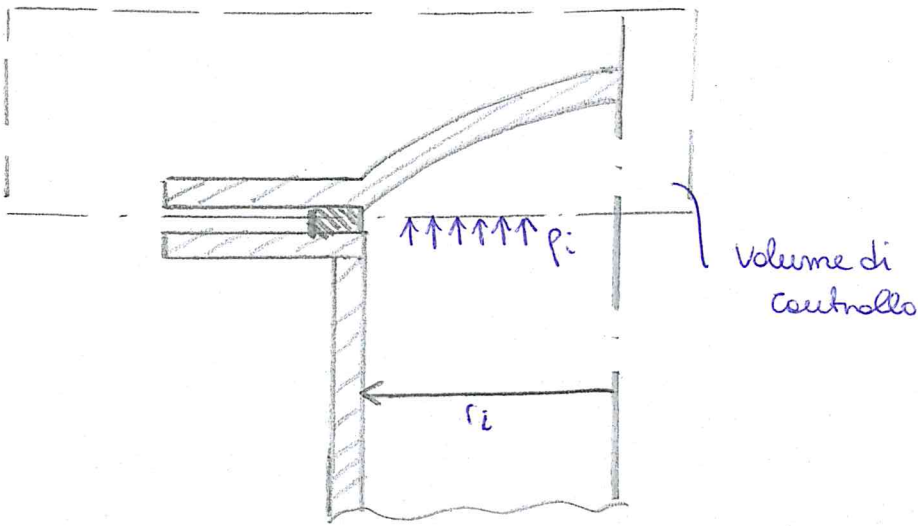
43. VITI PER RECIPIENTI (FASE DI AVVITAMENTO E FASE DI PRESSURIZZAZIONE)

Nel contesto dei recipienti in pressione i collegamenti filettati sono impiegati per collegare il coperchio al corpo dei recipienti. Sulle due estremità da collegare sono saldate due flange tra le quali si interpone una guarnizione di materiale più cedevole che serve ad assicurare la tenuta.

Analizziamo alcune fasi:

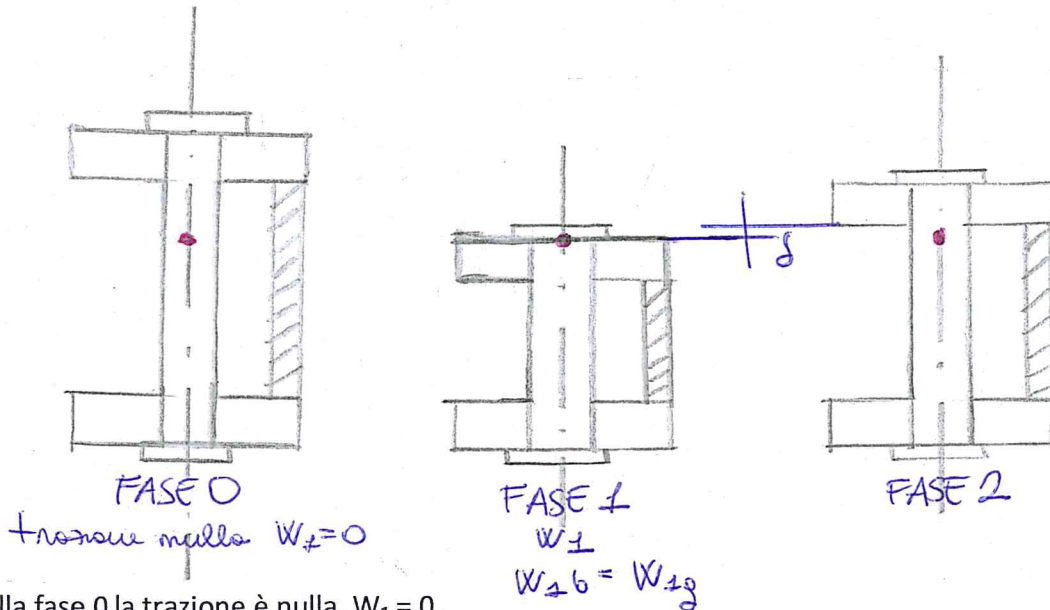
1 FASE DI AVVITAMENTO: in questa fase si vuole mettere in pressione la guarnizione per evitare che essa tregoli; di conseguenza il punto della vite presenta una forte di trazione e la guarnizione uno di compressione. Anche qualitativamente, una volta stabilito il volume di controllo (costituito da vite e guarnizione), le anche forte in gioco sono la trazione e la compressione.

2 FASE DI PRESSURIZZAZIONE = Una volta che il recipiente viene pressurizzato, la pressione interna p provoca l'insorgere di una forza Wz che provoca uno spostamento δ verso l'alto del coperchio rispetto al corpo. Allo stesso tempo il punto della vite si allunga di una quantità δ e anche la guarnizione aumenta il suo



La forza della vite serve a chiudere le flange e resistere alla pressione interna (il tappo non deve saltare).

All'inizio la pressione è nulla, quindi lo scopo dell'avvitamento è di mettere in pressione la guarnizione. In un primo momento i bulloni (insieme di una vite e del relativo dado) vengono serrati per assicurare la tenuta; poi il recipiente viene pressurizzato. Per effetto della pressione le viti si tendono ulteriormente mentre la guarnizione si scarica, anche se un certo carico deve rimanere su di essa per evitare perdite.



Nella fase 0 la trazione è nulla, $W_1 = 0$.

Nella fase 1, di pretensionamento, i bulloni sono tesi da una forza compressiva W_{1b} e corrispondentemente la guarnizione è compressa da una forza $-W_{1g}$. La sommatoria delle 12 forze relative alla vite è uguale all'integrale della pressione:

$$\sum_{i=1}^{12} W_{1i} = \int_{\text{sup-c}} PdA$$

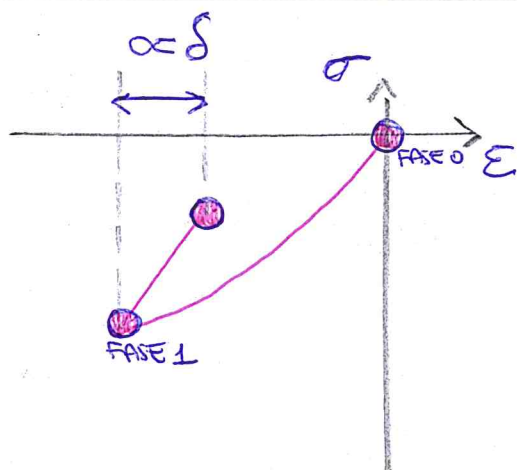
Nella fase 2, di pressurizzazione, la pressione interna p provoca l'insorgere della forza W_{2g} che provoca uno spostamento δ verso l'alto del coperchio rispetto al mantello. La guarnizione che prima era stata compressa ora si allunga e si distende. Quindi le viti si allungano di δ e la guarnizione aumenta il suo spessore di δ . In questa seconda fase si avrà una pressione interna p_i :

$$\int_{\pi r_i^2} p_i dA = W_2 = \pi r_i^2 p_i$$

(l'integrale è esteso all'area interna del recipiente).

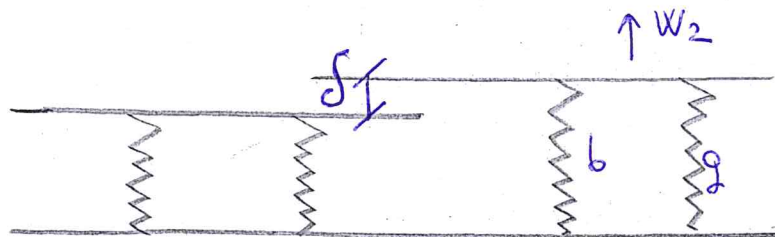
La forza risultante sulla guarnizione deve essere < 0 . Non osiamo però dire che nella seconda fase abbiamo una trazione sulla guarnizione. Le condizioni sono: la vite resiste, la guarnizione rimane compressa ma meno di prima. Alla fine il rilassamento non deve essere uguale a quello iniziale.

	VITE	GUARNIZIONE	TOTALE
FASE 1	W_{1b}	$-W_{1g}$	0
FASE 2	W_{2b}	W_{2g}	W_2



Però rappresento le fasi di questo processo sul diagramma $\sigma-\epsilon$: nella fase 0 non c'è solidazione perché il dado è lento, inizialmente c'è un comportamento lineare elastico per poi avere una forte schiacciatura e così formiamo la FASE 1. Siamo nel terzo quadrante perché la forza è di compressione. Il tratto 1-2 è proporzionale allo spostamento δ che rappresenta una lunghezza costante E è adimensionale.

✦ Siano K_b la forza che provoca un allungamento unitario delle viti (rigidezza delle viti) e K_g la forza che provoca una diminuzione unitaria di spessore della guarnizione (rigidezza della guarnizione). La forza W_2 si ripartisce in maniera proporzionale alla rigidezza, come in un sistema di due molle, la forza si ripartisce tra le due molle. Vogliamo sapere quanta forza va alla molla b e quanta alla molla g.



✦ Le forze si ripartiscono in maniera proporzionale K_b K_g rispetto alle due rigidezze. La forza si ripartisce tra bulloni e guarnizione considerando i parametri di rigidezza rispettivamente K_b e K_g . Anche l'allungamento δ corrisponde ad una forza effettiva nelle viti e nella guarnizione; la loro somma deve essere W_2 .

$$W_2 = W_{2b} + W_{2g}$$

$$W_{2b} = K_b \delta$$

$$W_{2g} = K_g \delta$$

Sommando membro a membro: $W_2 = \delta(K_b + K_g) \Rightarrow \delta = W_2 / (K_b + K_g)$

$$\Rightarrow W_{2b} = W_2 \frac{K_b}{K_g + K_b} \quad \text{e} \quad W_{2g} = W_2 \frac{K_g}{K_g + K_b}$$

Entrambe le aliquote sono positive per cui le viti si caricano ulteriormente mentre la guarnizione si decomprime.

Quanto vale la rigidezza?

$$F = \sigma A$$

$$\epsilon = \Delta l / l \Rightarrow \Delta l = \epsilon l$$

$$\epsilon = \sigma / E \Rightarrow \Delta l = \sigma l / E \Rightarrow \sigma = E \Delta l / l$$

$$\Rightarrow F = A E \Delta l / l$$

$$\Rightarrow W = \frac{\sigma E A}{L}$$

Il Δl è il nostro δ , quindi: $K_b = EA/l$.

Ricordiamo che E è il modulo di elasticità o modulo di Young, l è la lunghezza utile della vite e A è l'area totale di tutte le viti. Nel caso di K_g , l è lo spessore della guarnizione e A è l'area circolare della guarnizione.

44) VITI PER COLLEGAMENTO A FLANGIA (FASE DI AVVITAMENTO E FORZA DI ATTRITO RICHIESTA)

Le flange costituiscono delle espansioni a corona circolare all'estremità di un recipiente o di un tratto di tubo, in modo da assicurare la connessione con un elemento contiguo per mezzo di bulloni.

Un collegamento a flangia può essere realizzato con viti o con perni; i perni lavorano a taglio. ^{Il collegamento può essere parziale o integrale} Inoltre la differenza tra viti e perni sta nel fatto che i perni devono generare forza d'attrito. Infine i perni sono accoppiati con interferenza e le viti con gioco. *

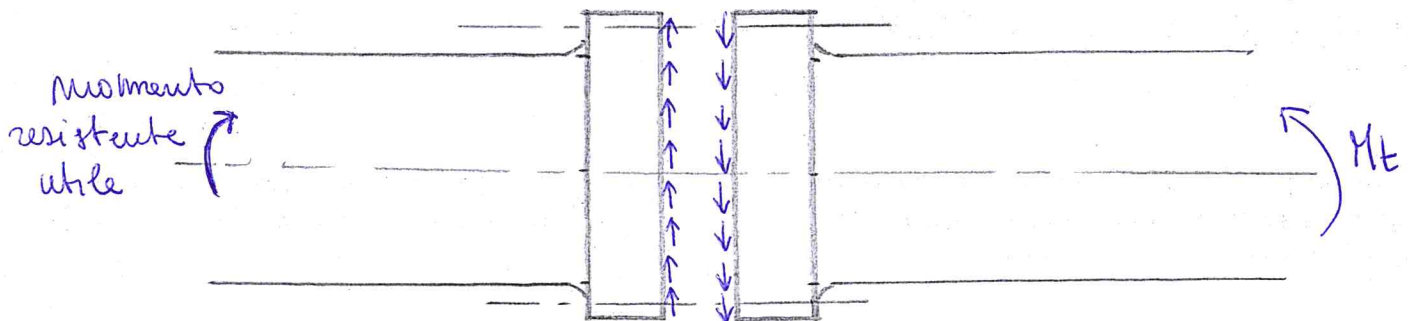
Nel collegamento a flangia con le viti, c'è contatto fisico tra le due flange, ma non si trasmette forza, o almeno noi non ne teniamo conto.

Come si genera la forza d'attrito?

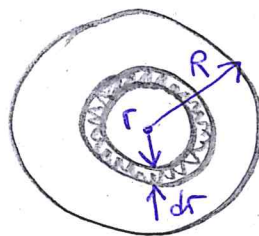
* Unendo le flange, le viti forniscono solidarietà ai due pezzi. Le due superfici vengono spinte l'una contro l'altra e grazie alle corone dei bulloni si genera una forza d'attrito statica che crea solidarietà.

La forza di attrito statico è proporzionale alla forza normale incidente il coefficiente d'attrito. Questa forza normale è ~~proporzionale~~ ^{proporzionale} alla forza di chiusura data anche pressione di contatto.

Abbiamo bisogno di una forza normale; quella d'attrito sarà proporzionale a quella normale per mezzo del coefficiente d'attrito statico. La forza normale è generata dal serraggio delle viti.



Nel passaggio tra forza normale e momento dobbiamo tener conto della pressione di contatto, che riterremo costante.



$$dN = 2\pi r p(r) dr \Rightarrow N = 2\pi p \int_0^R r dr = \pi p R^2$$

La forza d'attrito sarà data dalla forza di chiusura elementare; a noi interessa il momento M_t quindi dobbiamo ancora moltiplicare per r :

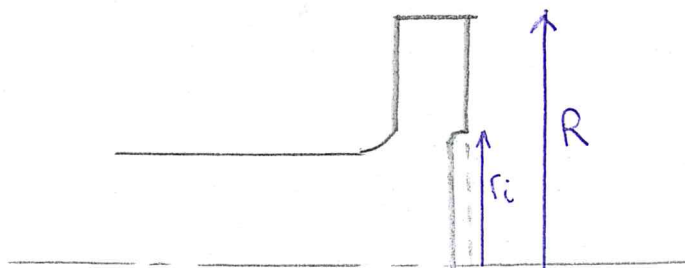
$$dM_t = (fdN)r = 2\pi p f r^2 dr \Rightarrow M_t = 2\pi p f \int_0^R r^2 dr = 2\pi p f \frac{R^3}{3}$$

A noi interessa la relazione che lega N e M_t :

$$\frac{N}{M_t} = \frac{3\pi R^2 p}{2\pi p f R^3} = \frac{3}{2fR} \Rightarrow N = \frac{3M_t}{2fR} \Rightarrow \int N = \frac{3M_t}{2R}$$

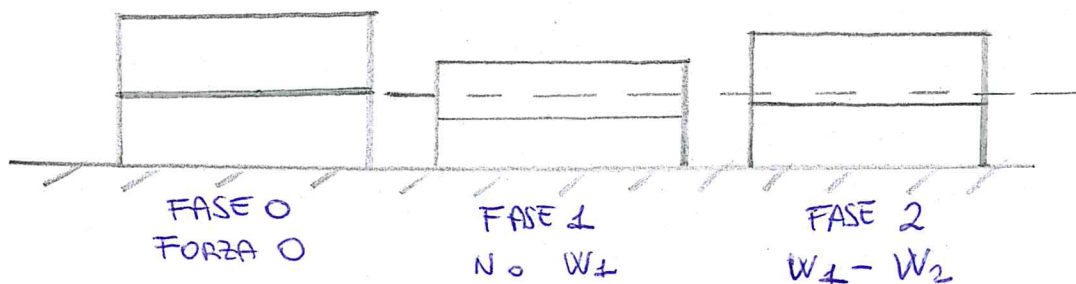
L'ipotesi che la pressione è costante è molto aleatoria, tutt'altro che valida, perché abbiamo una forza che agisce su punti discreti che si trovano all'estremità dell'area, quindi supporla uniformemente distribuita su tutta l'area è un'ipotesi molto forte.

La parte della superficie sulla quale si effettua la finitura è meno estesa della superficie totale; quindi è più giusto considerare la pressione distribuita soltanto nella parte più esterna, andando ad eliminare una parte di contatto tra le flange in prossimità dell'asse.



Può accadere che l'albero trasmetta anche trazione, sovraccaricando le viti e separando quindi le flange, facendo quindi diminuire il contatto.

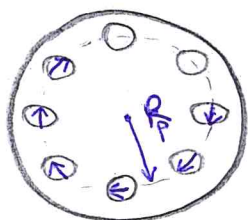
Le flange sono come molle più alte che larghe:



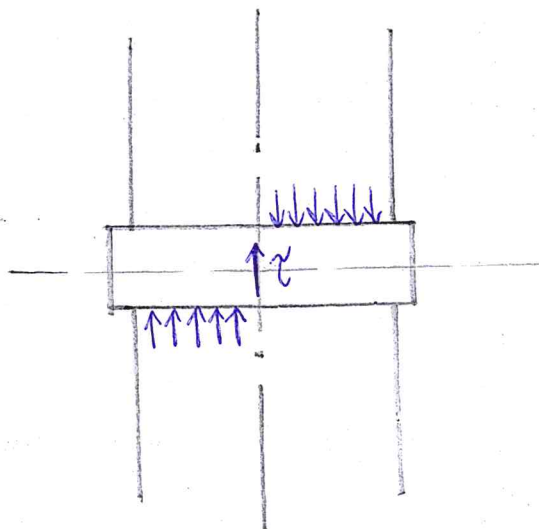
Un altro modo per ottenere solidità tra due flange è considerare le viti che funzionano da perni; la differenza è che questi ultimi sono legati con interferenza, e lavorano a taglio, mentre le viti con fessura. Accade che le due flange non sono solidali ma distanti e quindi tali da impedire lo sviluppo di una forza d'attrito; dobbiamo considerare solo le forze di taglio utrore ai perni.

45) PERNI PER COLLEGAMENTO A FLANGIA (VERIFICA A TAGLIO)

Quando il collegamento tra le flange è effettuato con i perni, il momento torcente lo si ottiene come sommatoria di forze concentrate dovute allo sforzo di taglio, che è un taglio puro (poco frequente in SDC).



R_p è ottenuto (tenendo in fase di verifica pomacuo scegliere)



$$M_t = \sum_1^8 M_i = R_p \sum_1^8 F_i$$

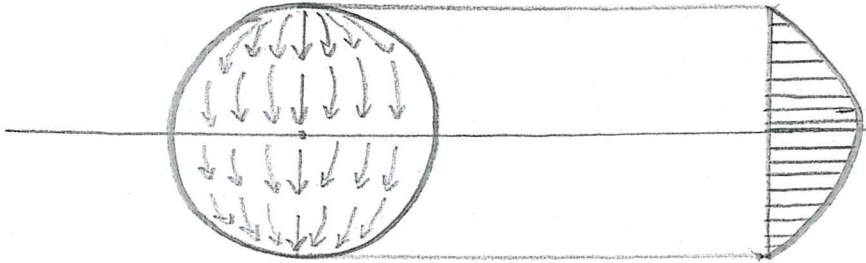
$$F_i = \int_{sez} \tau dA \Rightarrow F_i = \tau_{media} \pi R_{perno}^2$$

$$\Rightarrow M_t = R_p \tau_{media} \pi R_{perno}^2 N_{perni}$$

Per ottenere la τ_{media} e fare la verifica a taglio:

$$\tau_{media} = \frac{M_t}{N_{perni} \pi R_{perno}^2 R_p}$$

Per trasmettere il momento in maniera tranquilla devo aumentare il numero e la grandezza dei perni e l'area della superficie, nei limiti del possibile.



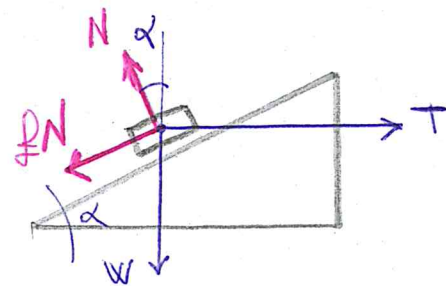
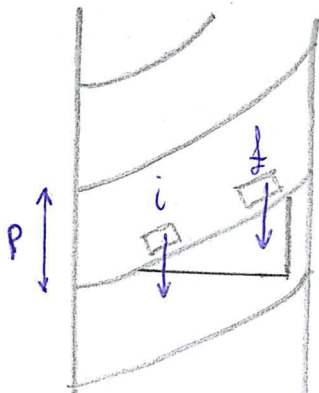
Distribuzione delle tensioni nel perno.

La verifica in realtà andrebbe fatta con la τ_{max} , che è quella sull'equatore.

$$\tau_{max} = 3/2 \tau_{media}$$

46) MOMENTO DI SERRAGGIO E MOMENTO PERDUTO PER ATTRITO

Per creare sulle viti il carico assiale W_1 , cioè un carico W_1/N su ciascuna vite, occorre stringere i dadi con il dovuto momento di serraggio. Per calcolarlo osserviamo che la coppia vite-madrevite è dinamicamente equivalente ad un piano inclinato: *(punto postulato): analizziamo un filetto del dado che preme sul filetto della vite; questo eserce una forza W_1 ; Quando il dado gira nel senso dell'avvitamento...*



Si consideri infatti un elemento del filetto del dado che preme sul filetto della vite. Esso esercita una forza W_1 . Quando il dado gira nel senso dell'avvitamento l'elementino si porta dalla posizione iniziale i a quella finale f . Per effettuare questo spostamento occorre una forza T perpendicolare all'asse della vite. Questa forza T è proprio la nostra incognita. Il momento di serraggio sarà dato dal prodotto della forza T per il raggio della vite.

Chiamiamo l'angolo di inclinazione del filetto α : $\operatorname{tg} \alpha = P/2\pi r_m$ (P passo della vite).

Facciamo l'equilibrio orizzontale e verticale:

$$-W_1 + N \cos \alpha - f N \sin \alpha = 0 \Rightarrow W_1 = N (\cos \alpha - f \sin \alpha)$$

$$T - N \sin \alpha - f N \cos \alpha = 0 \Rightarrow T = N (\sin \alpha + f \cos \alpha)$$

$$\frac{T}{W_1} = \frac{\sin \alpha + f \cos \alpha}{\cos \alpha - f \sin \alpha} = \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \Rightarrow T = W_1 \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$$

φ è l'angolo di attrito, $f = \operatorname{tg} \varphi$.

Quindi il momento di serraggio netto sarà: *(moltiplicando la forza per il braccio)*

$$M_t = W_1 \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) d_m / 2$$

dove d_m è il diametro medio tra quello esterno D (nominale) della vite e quello interno D_1 della madrevite.

L'angolo α vale circa 3° ; $f = 0.15 \div 0.2$; $\varphi \sim 10^\circ$ (in realtà sarà $15^\circ \div 20^\circ$). I due angoli hanno diversi ordini di grandezza, quindi invece di sommarli possiamo trascurare l'angolo α . $\Rightarrow T = W_1 \operatorname{tg} \varphi \Rightarrow M_t =$

Occorre considerare anche l'attrito tra dado e superficie di appoggio, che dà un momento: *$W_1 \operatorname{tg} \varphi \frac{d_m}{2}$*

$$M_d = \frac{D_m}{2} W_1 \tan \varphi'$$

(momento perduto per attrito) in cui φ' è l'angolo di attrito tra dado e superficie di appoggio e D_m è il diametro medio del dado (media tra larghezza in chiave e diametro nominale).

Il momento di serraggio è dato dalla somma di questi due momenti parziali, di cui il secondo è completamente perduto, mentre il primo rimane immagazzinato nella vite come momento torcente.

47) VERIFICA DELLA VITE (SFORZO NORMALE Più MOMENTO TORCENTE)

Il gambo della vite appare come un solido di De Saint Venant soggetto a trazione e torsione. Esso è soggetto ad uno sforzo normale:

$$Q = W_1 + W_2 \left(\frac{K_b}{K_b + K_g} \right)$$

e ad un momento torcente:

$$M_t = W_1 \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) d_m / 2$$

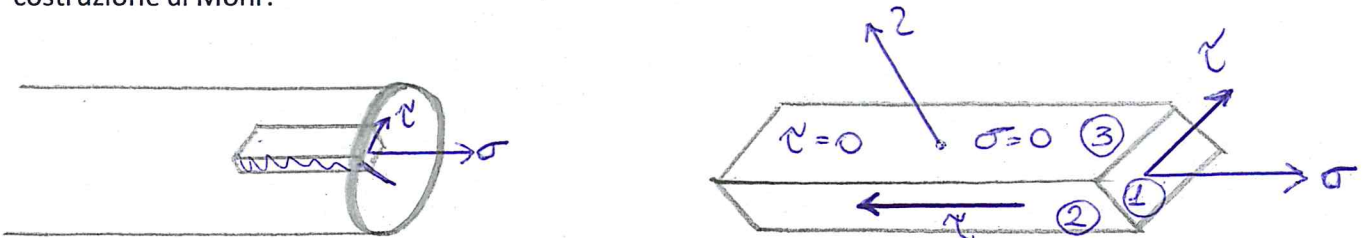
Infatti il momento M_d rimane confinato al dado e non interessa la vite. La verifica si fa come in un normale solido di De Saint Venant.

Lo sforzo di trazione dà luogo, sulla sezione perpendicolare all'asse, ad una distribuzione uniforme di tensioni normali, mentre il momento torcente dà luogo, sulla sezione perpendicolare all'asse, ad una distribuzione di tensioni tangenziali "a farfalla". Per la verifica si osserva che i cubetti più sollecitati sono sul contorno e per essi:

$$\sigma = N/A = W_{1b}/12A$$

$$\tau = \tau_{\max} = M_t/W_t = 16M_t/\pi D^3$$

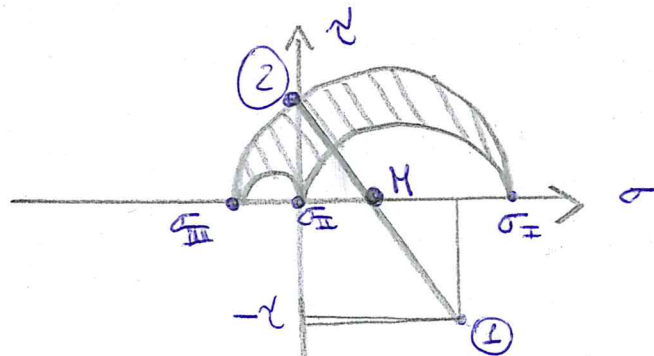
Per la determinazione delle tensioni principali, da introdurre in un criterio di resistenza, si sfrutterà la costruzione di Mohr.



Consideriamo il cubetto in figura. Le facce 1 sono sezioni normali della vite, le facce 2 sono sezioni radiali, le facce 3 sono parallele alla superficie laterale.

Risultando scarica la superficie laterale (è una delle condizioni poste al problema di DSV), le facce 3 sono scariche. Di conseguenza la normale r ad esse è una direzione principale (autovettore del tensore degli sforzi) e la relativa tensione principale (autovalore) è nulla.

Per la determinazione degli altri due autovalori seguiamo il teorema di Mohr, che dice che al ruotare del cubetto intorno alla normale r i punti le cui coordinate sono le σ e le τ percorrono sul piano di Mohr una circonferenza, mantenendosi su di essa diametralmente opposti.



$$\bar{c}_2 = \bar{e}_1 = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

Disegnando la situazione sul piano di Mohr si vede che il punto 1 ha coordinate $(\sigma, -\tau)$ e il punto 2 ha coordinate $(0, \tau)$ coerentemente con la regola dei segni di Mohr che prende positive le rotazioni orarie. Siccome i due punti sono diametralmente opposti il cerchio ha centro M di coordinate $(\sigma/2, 0)$, quindi le tensioni principali sono:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}$$

mentre $\sigma_2 = 0$ (come detto gli indici delle tensioni principali si scelgono in modo che sia $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$).

$$\Rightarrow \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_{amm}$$

$$2 \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} \leq \sigma_{amm}$$

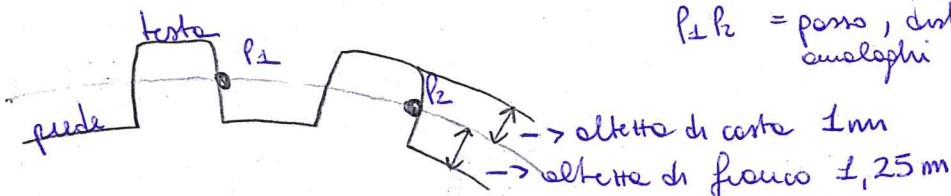
48) Definizioni: modulo, passo, altezza di costa etc

Ruota dentata: è qualcosa che spinge una ruota cingolare o viene da essa spinta tramite parti sporgenti e rientranti che le permettono di accoppiarsi con la ruota cingolare
 ↳ denti ↳ vami

Premettiamo alcune **definizioni** e nozioni fondamentali:

Superfici primitive sono le superfici assoidi cui corrisponde la legge di trasmissione che si vuol realizzare tra i due assi e che costituirebbero le superfici di due ruote di frizione cinematicamente equivalenti. È la superficie ~~primitive~~ *mediana ideale di contatto e si trova arco alla metà dei denti*

Linee primitive o primitive sono le intersezioni delle superfici primitive con una superficie contemporaneamente normale ad esse e agli assi di rotazione. Nel caso di assi paralleli le primitive sono le intersezioni dei cilindri assoidi con un piano normale ai due assi; nel caso di assi concorrenti sono le intersezioni dei con assoidi con una sfera avente il centro nel loro vertice comune; nel caso di



assi sghembi sono le intersezioni degli iperbolidi con due ellissoidi di rivoluzione generati da due ellissi omofocali con le iperboli che generano gli iperbolidi.

Testa e base del dente sono la parte del dente che sporge e rientra nella superficie primitiva, **costa e fianco** del dente le parti dei profili dei denti corrispondenti alla testa e alla base. Generalmente le altezze della testa e della base (misurate nella direzione del raggio) si fanno uguali a m e $4/5m$ (essendo m il modulo).

Il **passo** è la distanza tra due denti consecutivi, misurata lungo la primitiva. Il passo è uguale allo spessore del dente più il vano che è un poco maggiore dello spessore del dente (fig 120) per permettere ai denti della ruota compagna di ingranare. Se indichiamo con z il numero dei denti di una ruota di cui sia r il raggio della primitiva sarà

$$p = \frac{2\pi r}{z}$$

Essendo z ed r espressi in numeri interi, il passo risulta irrazionale. Si preferisce perciò nella pratica considerare, al posto del passo, il modulo.

Modulo (o passo diametrale) è il rapporto tra il diametro e il numero di denti

$$m = \frac{2r}{z}$$

Il modulo dunque non è altro che il passo misurato invece che in millimetri in unità di π millimetri e tra il modulo e il passo sussiste la relazione

$$m = p\pi.$$

Arco d'azione è la parte di primitiva che si svolge durante il tempo in cui un singolo dente rimane impegnato col dente coniugato. Esso è composto dall'arco di accesso e dall'arco di recesso, che corrispondono rispettivamente al tempo per il quale il contatto avviene lungo il fianco o lungo la costa del dente della ruota motrice. Per assicurare la continuità della trasmissione è necessario che l'arco di azione sia maggiore del passo, il che equivale a dire che prima che due denti siano abbandonati è necessario che altri due abbiano già incominciato a ingranare. Linea d'imbocco è il luogo dei punti dello spazio fisso in cui avviene successivamente il contatto dei punti corrispondenti di due profili compagni. Evidentemente la linea d'imbocco MN (fig. 121) non può prolungarsi oltre i due cerchi di testa delle due ruote.

La linea d'imbocco fornisce immediatamente la direzione della reazione mutua tra i denti. Infatti tale reazione (a parte l'effetto dell'attrito) è diretta secondo la normale ai profili nel punto di contatto e, per definizione di profilo coniugato, tale normale passa sempre per il centro di istantanea rotazione (punto di tangenza delle due primitive). Le varie rette che vanno dal centro di istantanea rotazione ai punti della linea di imbocco rappresentano perciò le successive direzioni della reazione tra i denti alla cui componente normale alla linea congiungente i centri è dovuta la trasmissione del moto. La linea d'imbocco MN permette di determinare l'arco d'azione proiettando gli estremi M ed N sulle due

primitive dai centri delle due ruote; l'arco d'azione risulta così dalla somma dei due archi di accesso e di recesso QO e OR.

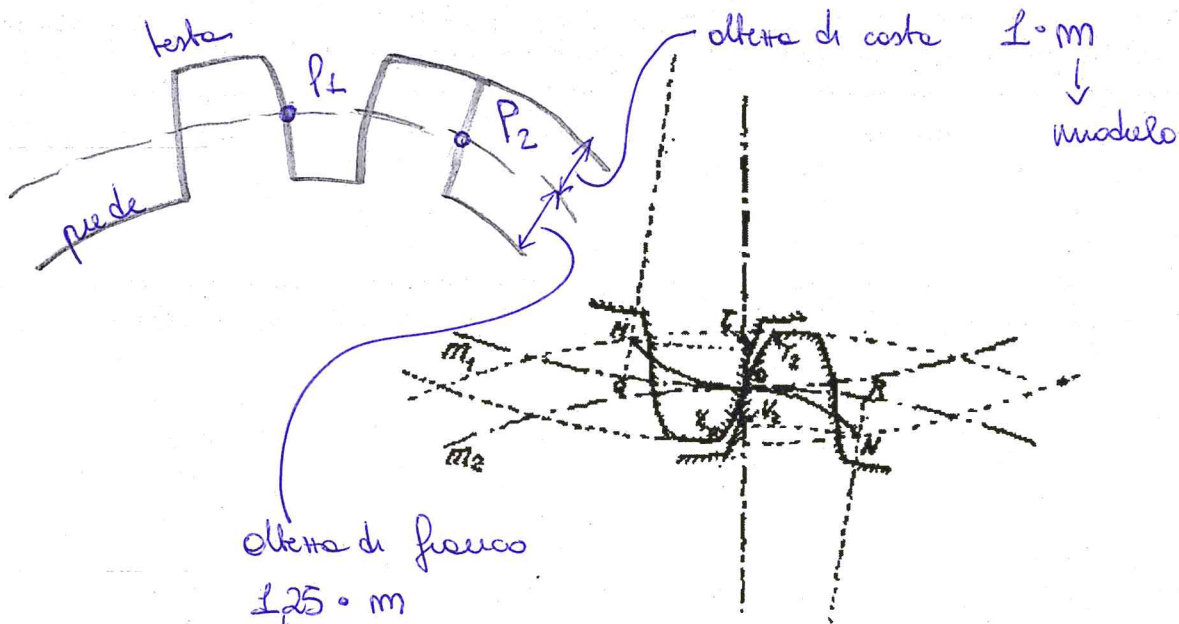


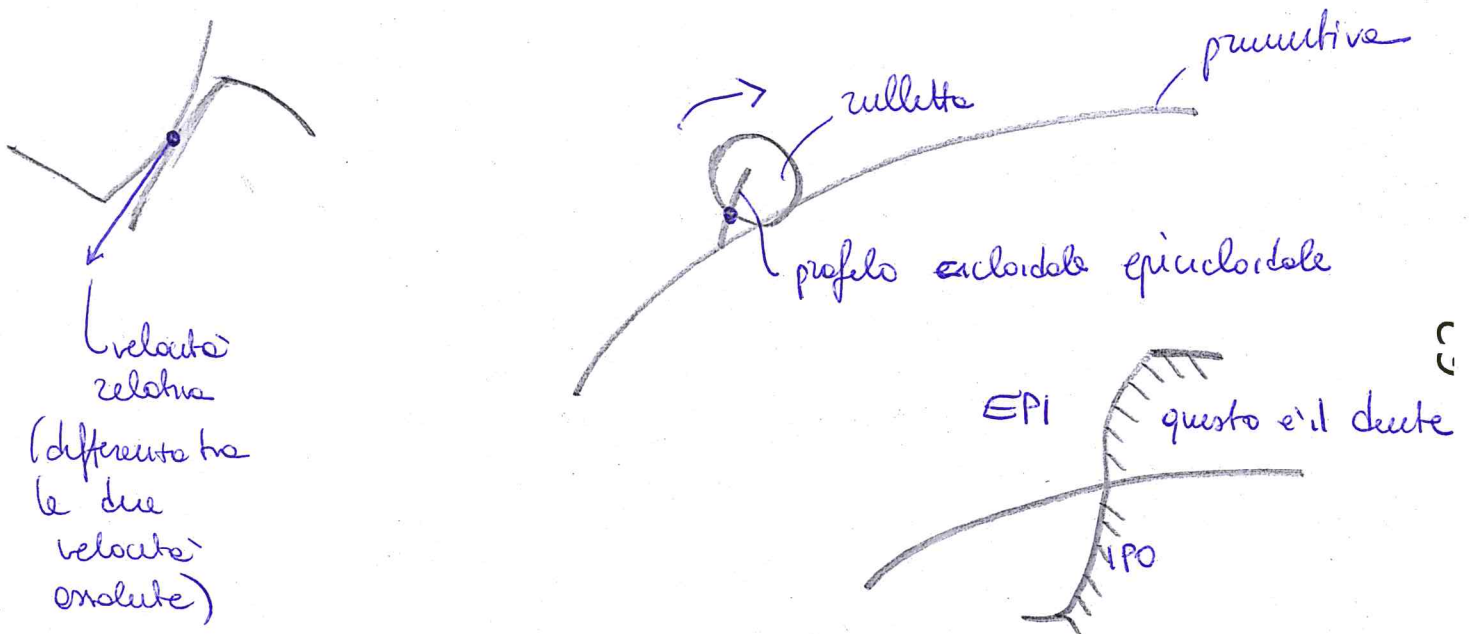
Figura 121: Linea d'imbocco

49) Profilo dei denti a evolvente e cicloide

Profilo cicloidale

Determinazione dei profili

Siano m_1 ed m_2 le due primitive: assumiamo una circonferenza e come curva rotolante, cioè come ipociclo (per la m_1) e come epiciclo (per la m_2) (figura 122).



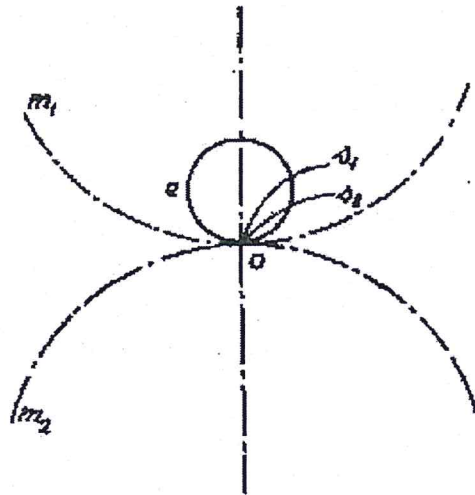


Figura 122: Profili cicloidali: determinazione dei profili

Per quanto è stato dimostrato le due rullette s e s (ipocicloide ed epicicloide) di un suo punto (per es. Del punto O) quando questa circonferenza i rotola rispettivamente sulla m e sulla m costituiscono due profili coniugati dei quali potremo utilizzare due archi per profilare due denti coniugati. Ma così facendo non potremmo ottenere che denti tutti sporgenti dalla superficie primitiva per la ruota m_2 , e tutti incavati dentro la superficie primitiva per la ruota m_1 , mentre conviene che i denti siano in parte sporgenti ed in parte incavati perché si discostino il meno possibile dalla superficie primitiva essendo lo strisciamento dei profili tanto minore quanto meno essi si allontanano dalla primitiva. Per completare i denti assumeremo perciò un'altra circonferenza i' (fig. 123) simmetrica della precedente rispetto ad O come epiciclo (per la m) e come ipociclo (per la m): le traiettorie s ed s di un suo punto (per es. del punto O) quando questa circonferenza i' rotola rispettivamente sulla m_1 e sulla m_2 costituiscono due profili coniugati ed anche di essi potremo utilizzare due archi per completare i profili dei denti che quindi risultano completi di costa e di fianco.

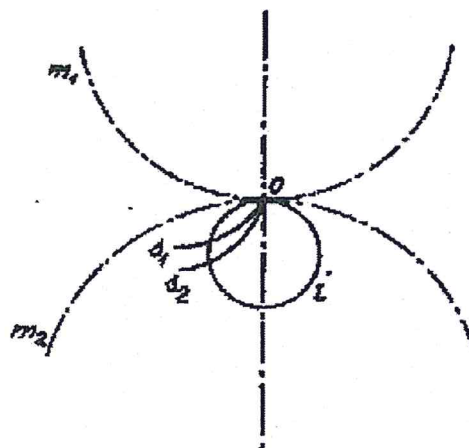


Figura 123: Profili cicloidali: determinazione dei profili

Gli archi di ipo- ed epicicloide che utilizzeremo per il profilo dei denti saranno per ciascuna ruota limitati dal cerchio di base e dal cerchio di testa (figura 124). I profili dei denti così ottenuti presentano in corrispondenza della primitiva un punto di flesso che costituisce una caratteristica del profilo cicloidale dal quale generalmente esso si può riconoscere sulle ruote già costruite.

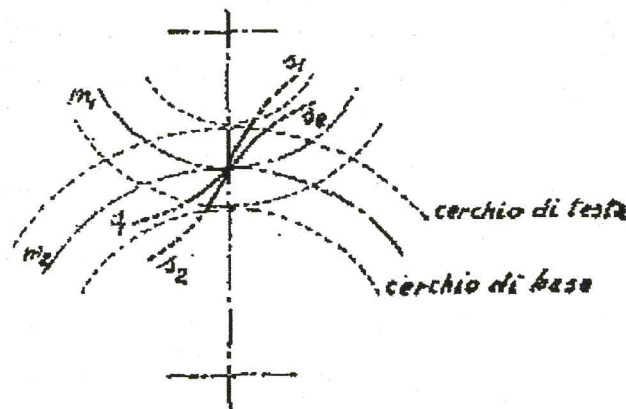


Figura 124: Profili cicloidali

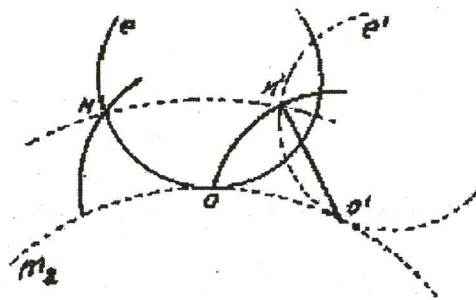


Figura 125: Linea d'imbocco

* La linea d'imbocco è il luogo dei punti di contatto tra denti coniugati.

Nei denti a profilo cicloidale la linea d'imbocco è un arco dell'epiciclo. Infatti sia m_1 la primitiva ed e' l'epiciclo (figura 125): consideriamo una posizione successiva e' dell'epiciclo cui corrisponde l'arco OM' di epicicloide descritta dal punto O ed il punto O' di tangenza con la primitiva. La normale in M' all'epicicloide è (per la proprietà dell'epicicloide) la $M'O'$. Durante la rotazione della ruota m_2 il punto M' descrive la circonferenza punteggiata: esso verrà a contatto col punto corrispondente del profilo coniugato dell'altra ruota quando (per proprietà di profilo coniugato) la normale condotta per esso al profilo passerà per il centro O di istantanea rotazione. Ma la normale condotta per M al profilo epicicloideale è, come si è detto, la $M'O'$ ed il punto O' verrà - durante la rotazione della ruota m_1 - a coincidere con O quando M' verrà a coincidere col punto M dell'epiciclo tangente in O alla primitiva.

* Retta di spinta è la direzione istantanea delle forze che si scambiano i denti -
 Queste due * coincidono nei profili ad evolvente mentre in quelli cicloidali **NO**.

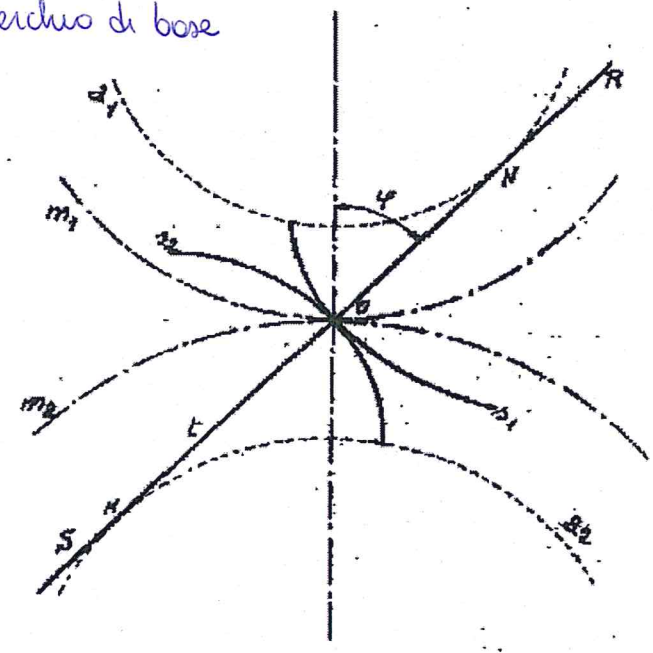
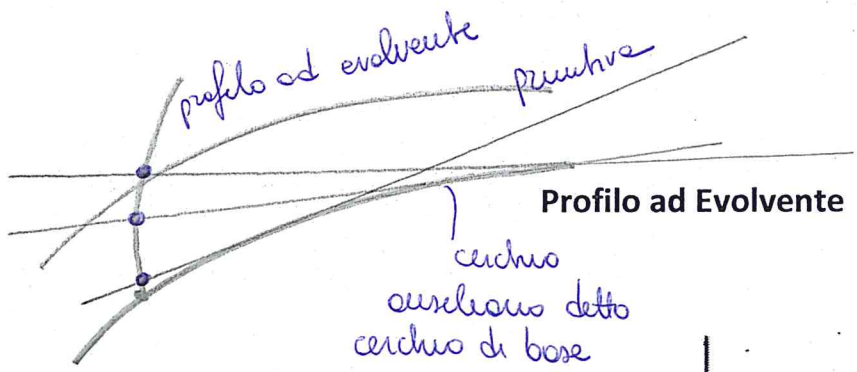


Figura 126: Generazione dei profili ad evolvente

Determinazione dei profili

Siano (figura 126) m_1 ed m_2 le due primitive: assumiamo una retta t tangente a due circonferenze ausiliarie interne alle primitive: tale retta t si chiama retta d'azione. Le traiettorie s_1 ed s_2 descritte da un punto (per es. O) della retta t quando essa si svolge rispettivamente sulle circonferenze ausiliarie a_1 ed a_2 costituiscono due profili coniugati. Ciò risulta evidente se si considera il moto relativo delle primitive m_1 ed m_2 e se si suppone avvolto sulle ausiliarie un filo inestensibile SR . Si supponga che sia fissa la m_2 e che la m_1 rotoli su di essa: il punto O del filo mentre questo si svolge sulla a_2 descrive l'evolvente s_2 . Considerando invece fissa la m_1 e mobile la m_2 il punto O descrive l'evolvente s_1 . Ora, queste due evolventi hanno un punto in comune in tutte le loro posizioni perché sono descritte entrambe dallo stesso punto O ed hanno inoltre la normale comune che è la retta t passante per il centro di istantanea rotazione O . In conseguenza le due evolventi costituiscono due curve coniugate il cui punto di contatto si sposta sulla retta t .

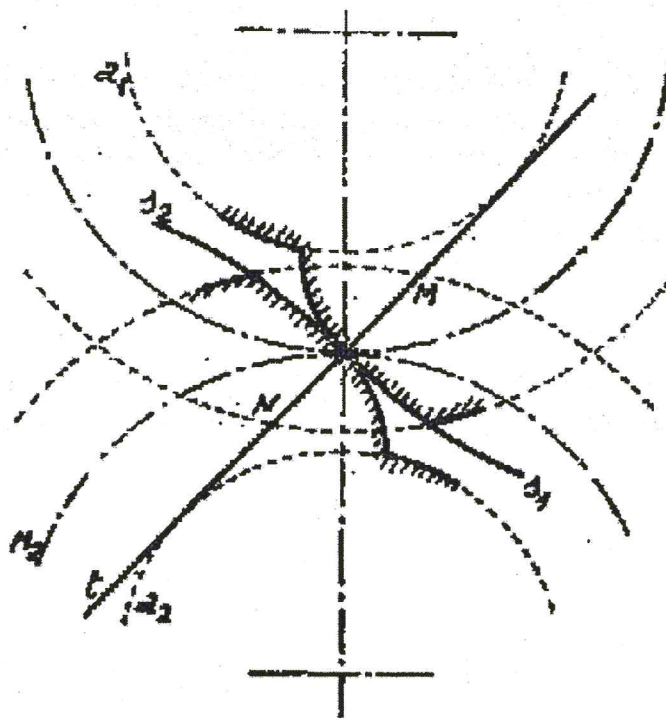


Figura 127: Denti a profilo elicoidale

Possiamo quindi scegliere (figura 127) due archi di tali evolventi limitati dal cerchio di base e dal cerchio di testa per profilare i denti delle ruote compagne: tali profili avranno per linea di imbocco il segmento MN della retta d'azione limitato dai due cerchi di testa. Ciò significa che la direzione della spinta tra i denti (a parte gli attriti) è diretta per tutta la durata dell'ingranamento secondo la direzione della retta d'azione.

Caratteristica dei profili ad evolvente

Una proprietà dei profili ad evolvente che nella pratica ha importanza notevole è costituita dal fatto che se la distanza fra gli assi di due ruote compagne è lievemente maggiore della somma dei raggi delle due primitive (per es. per una imperfezione di montaggio o per usura dei cuscinetti), i due profili seguitano ad essere coniugati. Infatti la normale ai profili nei punti di contatto rimarrà sempre diretta secondo la tangente comune alle due circonferenze ausiliarie le quali non si modificano per il fatto che gli assi delle ruote cambiano la loro posizione relativa, trattandosi di elementi geometrici direttamente coniugati alle sagome dei denti. Ciò significa che i profili rimangono coniugati. Oltre a ciò la legge di trasmissione del moto non risulta per l'allontanamento degli assi modificata, potendosi scrivere (figura 128), se $r_1 = AO$, $r_2 = OB$, ed essendo il nuovo centro di istantanea rotazione O' , intersezione fra la congiungente i centri e la tangente comune alle ausiliarie:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{BO'}{A'O'} = \frac{BM'}{A'N'} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{z_2 \sin \phi'}{z_1 \sin \phi'} = \frac{z_2}{z_1}$$

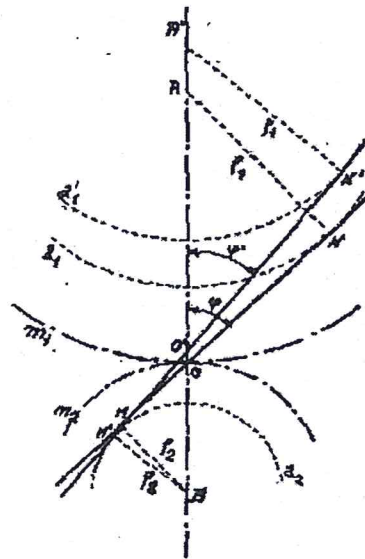


Figura 128: Ruote ad evolvente nel caso di aumentato interasse

Tutto si riduce quindi soltanto ad una piccola variazione dell'angolo di spinta che viene ridotto da φ a φ' . Per tale preziosa proprietà, oltre che per la maggiore facilità di lavorazione (essendo a semplice curvatura) il profilo ad evolvente è certamente il più usato.

50) Verifica del dente a flessione (fatica dallo zero)

La verifica di resistenza degli ingranaggi deve essere eseguita per le due condizioni:

- di usura del dente per lo strisciamento col dente compagno, *(ingranaggi di velocità)*
- di rottura del dente per carico di fatica. *(ingranaggi di forza)*

Condizione di resistenza a rottura del dente per fatica

Il dente della ruota si comporta essenzialmente come una mensola incastrata alla base e sollecitata all'estremità da una forza concentrata. Si destano quindi in esso sforzi di flessione e di compressione. Nel calcolo a rottura si trascura innanzitutto l'aliquota compressiva, dovuta alla componente assiale della forza, in quanto, come ogni compressione, essa tende a chiudere le eventuali cricche di fatica che si destassero, per cui trascurarla va a vantaggio di sicurezza. Nel calcolare gli sforzi da momento flettente si schematizza il dente come una mensola a sezione triangolare con angolo al vertice di 60° e tangente internamente all'effettivo profilo, come in figura 139.

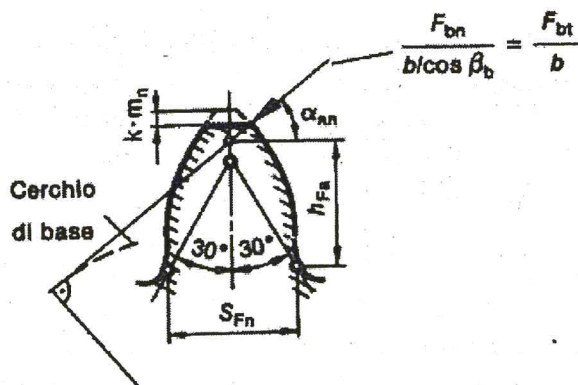


Figura 139: Calcolo del dente a flessione

Si considera inoltre, sempre a vantaggio di sicurezza, che vi sia una sola coppia di denti in presa e che la forza agisca proprio all'estremità del dente. Tale forza vale ovviamente $F_t/\cos\alpha$, ma la sua inclinazione rispetto alla normale all'asse del dente vale α_{an} in quanto il contatto critico avviene quando i denti si toccano lontano dalle primitive. Tale angolo α_{an} risulta maggiore dell'angolo di spinta α della quantità γ di figura 140, che è lo spostamento angolare dell'asse del dente in condizione di incipiente ingranamento rispetto alla posizione del unto di contatto tra le primitive.

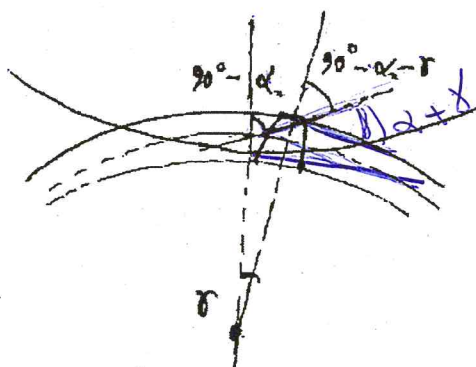
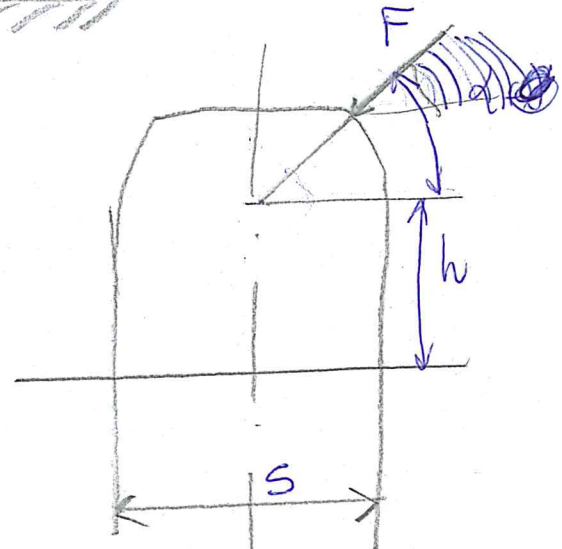
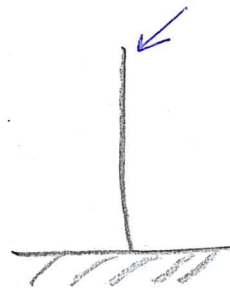
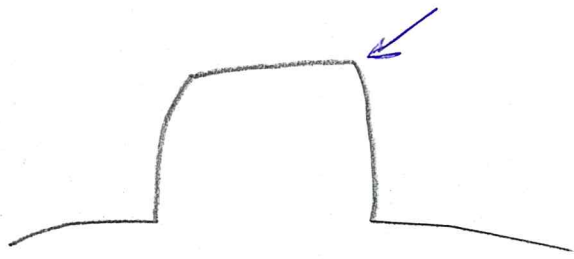
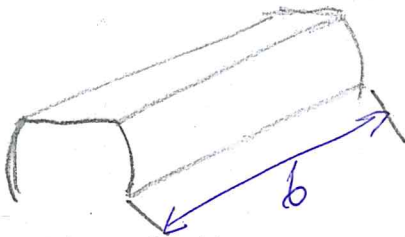
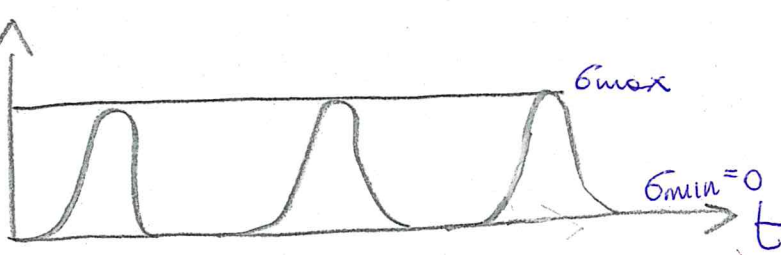


Figura 140: L'inclinazione tra forza trasmessa ed asse del dente risulta maggiore in condizione di incipiente ingranamento che in condizione di contatto centrale, e precisamente maggiore di un angolo γ , che costituisce anche la differenza $\alpha_{an} - \alpha_n$.



$S =$ larghezza totale del dente alla base



Nel 99% dei profili abbiamo un angolo α di 20° ; il dente è una mensola di altezza h e base $S \cdot b$; avremo quindi:

$$\sigma = \frac{F \cdot \cos(20^\circ + \gamma) \text{ (forza)} \cdot h \text{ (braccio)}}{W_f}$$

dove W_f è il modulo di resistenza a flessione ed è pari a:

$$W_f = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{b \cdot S^2}{6} \text{ (nel nostro caso)} \Rightarrow \sigma = \frac{6 F h \cos(20^\circ + \gamma)}{b S^2}$$

$D_p = m \cdot z$ modulo per numero di denti

$$M_t = F_t \cdot \frac{D_p}{2} \text{ raggio medio } \left(\frac{D_p}{2}\right)$$

$$F_t = F \cos \alpha \Rightarrow \sigma = \frac{6 F_t h}{b S^2} * \frac{\cos(20^\circ + \gamma)}{\cos \alpha}$$

S e h si possono scrivere in funzione del modulo, moltiplico e divido per il modulo sia h che S , e troviamo due grandezze adimensionali:

$$\sigma = \frac{F_t}{b \cdot m} * \frac{6 \left(\frac{h}{m}\right)}{\left(\frac{S}{m}\right)^2} * \frac{\cos(\alpha + \gamma)}{\cos \alpha}$$

Le ultime due frazioni sono funzione solo di z e le indichiamo con q .

$$\sigma = \frac{F_t}{b m} * q K_t$$

K_t è un coefficiente teorico di intaglio, il dente alla base è intagliato. Giudice decide che mettiamo f al posto di t perché non è teorico ma di flessione. F_t dipende dal momento torcente e dal diametro primitivo.

Vogliamo trovare una formula di progetto:

suppongo $b = \lambda * m$ dove $\lambda = 10$ per ingranaggi grossolani, 20 per ingranaggi normali e 30 per ingranaggi precisi.

Al posto di F_t sostituiamo: $F_t = 2M_t / D_p = 2M_t / m * z$

$$\sigma = \frac{2M_t * q * K_f * 1}{m * z * \lambda * m^2} = \frac{2M_t}{\lambda * z * m^3} * q * K_f$$

$$m = \sqrt[3]{\frac{2M_t * q * k_f}{\lambda * z * \sigma_{amm}}}$$

σ_{amm} è di tipo $\sigma_R / 2.6$

$q * K_f$ è dell'ordine ≈ 5