

# Pensierini di meccanica quantistica

Giuseppe Giudice

18 marzo 2004

## 1 Le origini della meccanica ondulatoria

La meccanica ondulatoria nasce dal fatto sperimentalmente accertato che le particelle di materia (elettroni, nucleoni, e anche interi atomi) presentano talvolta caratteristiche ondulatorie, cioè fenomeni tipo l'interferenza e la diffrazione; un caso applicativo notissimo è il microscopio elettronico.

La cosa fenomenale è che le evidenze sperimentali vennero trovate quando tutto l'apparato teorico era già stato stabilito da tempo. E precisamente: nel 1923 de Broglie, allora semplice dottorando, propose che ad ogni particella si associasse un'onda; nel 1925 Schrödinger fondò e completò la meccanica ondulatoria, e nel 1926 Born, Heisenberg e Jordan dimostrarono l'equivalenza della meccanica ondulatoria con la meccanica delle matrici (o semplicemente meccanica quantistica), da loro già scoperta. Solo nel 1927 Davisson e Germer e nel 1928 J.J. Thomson dimostrarono la natura ondulatoria dell'elettrone.

La meccanica ondulatoria, che è una delle forme della meccanica quantistica venne quindi fondata solo sulla base di audaci concetti teorici, poi verificati in maniera clamorosa dall'esperimento.

Vista la nostra pochezza, partiremo, contro l'ordine storico, dagli esperimenti di diffrazione degli elettroni.

Partiamo perciò dal seguente postulato: *tutta la materia, comprese le particelle materiali, mostra proprietà ondulatorie.*

## 2 L'interferenza classica

Consideriamo due onde classiche che incidono su un certo punto dello spazio; per semplicità consideriamo il caso molto particolare di onde con la stessa ampiezza e frequenza, e rigorosamente monocromatiche. La generalità delle conclusioni non ne viene inficiata. La natura dell'onda qui non interessa: possono essere onde meccaniche o elettromagnetiche.

Le due onde sono descritte dall'intensità del vettore spostamento, che è:

$$y_1 = a \sin(\omega t + \phi_1)$$

$$y_2 = a \sin(\omega t + \phi_2)$$

il punto investito dall'onda oscilla con uno spostamento che è la somma dei due:

$$y = y_1 + y_2 = 2a \cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \sin\left(\omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \quad (1)$$

(sono state applicate le formule di prostaferesi), per cui l'ampiezza dell'oscillazione è:

$$A = 2a \cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right).$$

Se la differenza di fase è nulla l'ampiezza dell'oscillazione è massima e pari a  $2a$ , cioè la somma delle ampiezze delle due onde incidenti; se la differenza di fase è  $\pi/2 + k\pi$  l'ampiezza è nulla.

Consideriamo il caso di due sorgenti puntiformi, oscillanti in fase; allora la differenza di fase delle onde che investono i vari punti dello spazio dipende dalla differenza dei cammini ottici che percorrono le onde provenienti dalle due sorgenti; se è così, si ha una successione regolare di frange chiare e scure, a seconda che i cammini differiscano di un multiplo intero di lunghezza d'onda o di un multiplo semintero.

Incidentalmente, realizzare due sorgenti puntiformi monocromatiche e in fase è tutt'altro che facile e quindi in pratica l'effetto di interferenza si verifica di rado (da ciò la convinzione di Newton e di molti altri che la luce fosse corpuscolare).

Dal punto di vista classico misurare l'ampiezza e la fase dell'oscillazione è sempre possibile, ma spesso è chiaramente poco pratico; pensiamo ad esempio a onde elettromagnetiche di lunghezza d'onda  $10^{-9}$  m e di frequenza  $3 \times 10^{14}$  Hz (infrarosso vicino); ovviamente la misura istantanea del campo elettrico o magnetico è fuori discussione, e ancor più la misura della fase. L'interferenza si osserva però ugualmente facendo misure di intensità luminosa, cioè misurando l'energia dell'onda elettromagnetica mediata opportunamente nel tempo.

In altri termini ciò che si va ad osservare è la

$$I = C \frac{1}{T} \int_0^T y^2 dt$$

in cui  $T$  è un tempo opportuno, dipendente dalla prontezza del rivelatore, ma comunque molto maggiore del periodo dell'oscillazione, e  $C$  una costante di proporzionalità dipendente dalla natura delle oscillazioni, dal mezzo oscillante e dalle unità di misura. Sostituendo la (1) si ha

$$I = C2a \cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2\left(\omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) dt.$$

Siccome  $T$  è molto maggiore del periodo delle oscillazioni possiamo senza errore intendere che l'integrale sia esteso ad un numero intero di periodi; in

questo caso il valor medio è  $1/2$ , quindi

$$I = Ca \cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)$$

e quindi possiamo conoscere l'ampiezza della vibrazione facendo semplici misure d'intensità.

Nel caso dell'interferenza di elettroni (per esempio con l'esperimento delle due fenditure, descritto in tutti i libri e le pagine web sull'argomento) si hanno frange d'interferenza del tutto simili a quelle ottiche, per cui si deve ipotizzare che associata all'elettrone ci sia un'onda, di cui misuriamo l'intensità ossia la media temporale del quadrato dell'ampiezza, ma il cui "vettore spostamento" rimane da determinarsi. Purtroppo fu subito chiaro che non solo per difficoltà pratiche, ma proprio per questioni di principio tale "spostamento" non è misurabile.

In compenso questo vettore o ampiezza d'onda racchiude in sé tutto quanto è misurabile dell'elettrone stesso, e in generale di un sistema, comunque complesso, di particelle subatomiche, ossia come si dice, lo stato del sistema.

### 3 Lo stato di un sistema classico

Nel caso classico lo stato di un sistema viene dato assegnando la posizione e la velocità di ciascuna particella che lo costituisce. Le equazioni dinamiche si semplificano se invece della velocità si assegna il prodotto  $m\mathbf{v}$ , detto di solito quantità di moto, ma spesso impulso o momento (in inglese momentum).

Tutta l'evoluzione del sistema a questo punto è determinata: infatti le forze tra particelle dipendono dalla loro reciproca posizione (caso delle forze elettrostatiche e gravitazionali) o dalla loro velocità relativa (caso delle forze magnetiche). La presenza di interazioni con l'ambiente viene introdotta sotto forma di campi esterni, sia costanti che variabili nel tempo.

Convien anche visualizzare il moto del sistema come quello di un unico punto in uno spazio astratto. Gli spazi che si considerano sono soprattutto lo spazio delle configurazioni e lo spazio delle fasi.

Lo spazio delle configurazioni è uno spazio a  $3N$  dimensioni, se  $N$  sono le particelle del sistema, ciascuna corrispondente alla posizione spaziale di una delle particelle del sistema; in questo spazio il punto rappresentativo del sistema si muove con una velocità che riassume tutte le velocità delle particelle.

Lo spazio delle fasi è invece uno spazio a  $6N$  dimensioni,  $3N$  per le posizioni e  $3N$  per i momenti. Lo spazio delle configurazioni è quindi un sottospazio di quello delle fasi.

Anche nello spazio delle fasi il sistema è rappresentato da un unico punto; ma questa volta per determinare il moto del sistema non abbiamo bisogno di

applicare ad esso un vettore velocità, ma questa è determinata dalla posizione stessa nello spazio (in cui infatti  $3N$  assi sono assi di velocità).

Dal punto di vista classico è possibile determinare con esattezza la posizione del sistema (ora ridotto ad un punto) nello spazio delle fasi; ma spesso, per il gran numero di coordinate, ci si deve accontentare di determinare la posizione in senso statistico, dando cioè una distribuzione di probabilità. Viene introdotta allo scopo una funzione densità di probabilità  $\rho(q, p)$ , in cui  $q$  rappresenta l'insieme delle coordinate di posizione e  $p$  l'insieme delle coordinate di momento. Il significato fisico della  $\rho(q, p)$  è il seguente: dato un elementino di volume  $dqdp$  nello spazio delle fasi, la probabilità di trovare il sistema in esso è di  $\rho(q, p), dqdp$ . Se consideriamo una porzione finita  $V$  dello spazio delle fasi, la probabilità di trovare in esso il sistema è  $\int_V \rho(q, p), dqdp$ . Inoltre, per la definizione di probabilità, l'integrale della  $\rho$  esteso a tutto lo spazio deva dare 1.

Nel caso quantistico la descrizione probabilistica è necessaria soprattutto perché non tutte le quantità (posizioni e momenti) possono essere determinate contemporaneamente. La quantità che s'introduce è tuttavia diversa da quella del caso classico.

## 4 Osservabili di un sistema classico

Premetto che si dice osservabile una qualsiasi variabile del sistema fisico che può essere osservata: per esempio la posizione di una particella, o la sua velocità o il suo momento angolare, o il momento angolare complessivo del sistema, o l'energia eccetera.

Siccome lo stato del sistema è dato assegnando un punto nello spazio delle fasi, è naturale che un'osservabile sia funzione del punto (cioè dello stato del sistema) e del tempo; quest'ultimo compare in quanto le caratteristiche globali del sistema, per esempio la sua energia, possono variare nel tempo.

Si ha quindi che un'osservabile è  $A(q, p, t)$ . La variazione dell'osservabile nel tempo si scrive, in meccanica classica, attraverso l'equazione elegantissima

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t}$$

in cui compare la parentesi di Poisson e  $H$  è l'energia totale, o hamiltoniana del sistema.

## 5 Lo stato di un sistema quantistico

- Quanto di più vicino abbiamo alla classica densità di probabilità del caso classico è la "misteriosa" quantità  $\Psi$ , che si chiama *ampiezza di probabilità*.
- $\Psi$  riassume lo stato del sistema.

- $\Psi$  è funzione del tempo e delle coordinate, ma non dei momenti (è possibile però introdurre una  $\tilde{\Psi}$  che è funzione dei momenti e del tempo ma non delle coordinate).
- Moltiplicando  $\Psi$  per una costante complessa lo stato non varia. Ciò permette di normalizzare; ovvero si pone  $\int |\Psi|^2 dq = 1$ .
- Se  $\Psi$  è normalizzata,  $|\Psi|^2$  s'interpreta come densità spaziale di probabilità. ovvero  $|\Psi|^2 dq$  è la probabilità che la particella si trovi nell'elementino di volume  $dq$ ; naturalmente  $|\Psi|^2$  dipende anche dal tempo.
- la corrispondente classica di  $|\Psi|^2$  è la densità nello spazio delle fasi, generalmente indicata con  $\rho(q, p)$ . Quindi la  $\Psi$  non è una vera densità di probabilità; onde il suo nome di ampiezza di probabilità.
- A differenza del caso classico,  $\Psi$  dipende solo dalle coordinate  $q$  e non dai momenti  $p$ . Quindi la descrizione dello stato è meno dettagliata che nel caso classico
- il principio d'indeterminazione non pone limiti sulla determinazione di una singola grandezza, ma solo su grandezze misurate contemporaneamente. Il mondo quantistico è estremamente determinato, ma in modo diverso (e comunque meno dettagliato) da quello classico. Il principio d'indeterminazione *non* afferma che “tutto è indeterminato,” allo stesso modo in cui la relatività *non* afferma che “tutto è relativo.”
- $\Psi$  è retta dall'equazione di Schrödinger. Per una particella in moto unidimensionale (ossia se lo spazio delle configurazioni è ad una sola dimensione) si ha:

$$\left(-\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right) \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t)$$

(qui compare al primo membro il prodotto simbolico  $(\partial^2/\partial x^2) \times \Psi = \partial^2 \Psi / \partial x^2$ ) che più sinteticamente, si scrive:

$$\hat{H} \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t)$$

in cui abbiamo introdotto l'operatore hamiltoniano

$$\hat{H} = -\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x).$$

Per tradizione gli operatori si indicano ponendo su essi un “cappuccio.”

- l'equazione di Schrödinger non si dimostra ma è un postulato, come del resto sono postulati la legge di gravità e le equazioni di Maxwell.

Solo l'esperimento ci può dire che stiamo facendo la scelta giusta, ma l'esperimento va a confermare le conseguenze della legge e non a porre i presupposti della legge stessa.

Storicamente anche Schrödinger come de Broglie, trovò la sua equazione grazie ad un "lampo di genio" ben prima che la natura ondulatoria dell'elettrone fosse appurata.

- Vale il principio di sovrapposizione quantistica, di cui per il momento do solo un esempio: se, nell'esperimento delle due fenditure, l'elettrone può passare solo dalla A, allora lo stato dell'elettrone è descritto dalla  $\Psi_A(x, y, z, t)$ ; se può passare solo dalla fenditura B, lo stato è descritto dalla  $\Psi_B(x, y, z, t)$ ; se può passare da entrambe le fenditure, allora  $\Psi(x, y, z, t) = \Psi_A + \Psi_B$ ; però la somma è solo un caso particolare; se la sorgente è più vicina ad una delle fenditure vale una somma pesata. Le probabilità di trovare l'elettrone non si sommano: infatti  $|\Psi|^2 \neq |\Psi_A|^2 + |\Psi_B|^2$  (c'è anche il termine del doppio prodotto).
- Se l'hamiltoniana è indipendente dal tempo si risolve l'equazione di Schrödinger eliminando prima il tempo; si risolve poi per la  $\psi$  spaziale.
- per una particella in un campo di forze la soluzione è possibile solo per certi valori dell'energia.
- data la  $\psi(q)$  è possibile trovare la  $\tilde{\psi}(p)$  tramite trasformata di Fourier.
- una particella è in uno stato di posizione se la sua posizione è ben definita (la  $\psi(q)$  è una delta di Dirac); in questo caso il momento è molto disperso; e vice versa;
- una particella in uno stato di posizione ha una posizione ben definita, ma all'istante successivo la  $\psi$  si disperde in una zona vasta, e la posizione diventa sempre più indefinita.
- il meglio che possiamo fare è metterci in una situazione in cui sia la  $q$  che la  $p$  siano "abbastanza" definiti (caso del pacchetto d'onda). questo pacchetto si muove con una certa velocità (velocità di gruppo) mantenendo la propria individualità.
- Oltre agli stati di posizione e di momento esistono anche stati di energia; questi sono più noti perché corrispondono, per esempio, ai livelli di energia di un atomo.  
Una particella è in uno stato energetico se la sua energia è ben definita; solo gli stati energetici possono essere stati stazionari.
- secondo Penrose la particella è la sua funzione  $\Psi$ ; ma questo non è molto condiviso.

- le variabili dinamiche che descrivono il sistema sono: le posizioni  $q$ , i momenti  $p$ , i momenti angolari (o momenti della quantità di moto), e l'energia totale. Le posizioni hanno tipicamente uno spettro continuo; le altre sono tipicamente quantizzate (almeno per una particella vincolata); in particolare è tipicamente quantizzata l'energia.
- conviene rappresentare la  $\psi$  come elemento (punto) di uno spazio vettoriale (che di fatto risulta essere uno spazio di Hilbert). Ogni stato è rappresentato da una retta dello spazio, o da un raggio, o dal versore della retta o del raggio. La retta o il raggio passano per l'origine dello spazio. Lo spazio di Hilbert non ha nulla a che fare con lo spazio delle fasi né con quello delle configurazioni.
- posso proiettare ogni stato su un sistema di assi, cioè su una base.
- lo spazio di Hilbert (spazio cartesiano) è un ambiente particolarmente familiare e confortevole; l'unica sua caratteristica "strana" (però affascinante) è che contiene un numero infinito di dimensioni.
- L'azione di un apparato sperimentale sullo stato di un sistema si rappresenta tramite un operatore che trasforma lo stato in un altro (Feynman). Qui è evidentemente la radice della rappresentazione delle grandezze fisiche come operatori. Il sistema quantistico entra nell'apparato essendo in uno stato; l'apparato trasforma quello stato in un altro; questa trasformazione è di carattere operatoriale; tutte le caratteristiche dell'apparato sono racchiuse in un suo modello matematico che è un operatore; ma l'apparato serve ad effettuare una misura; quindi possiamo identificare la grandezza che misuriamo con lo stesso operatore dell'apparecchio.

Può apparire strano che un apparato di misura modifichi il sistema in studio; infatti in meccanica classica si ammette che l'eventuale perturbazione introdotta dall'apparato di misura possa essere resa piccola a piacere; invece una delle caratteristiche del mondo subatomico è che non possiamo effettuare una misura senza perturbare lo stato del sistema; solo in alcuni casi particolari la perturbazione si annulla, ma ciò non è vero in generale, e non per trascuratezza dello sperimentatore ma per ragioni di principio.

- i sistemi più "quantistici" e dai quali conviene partire sono i sistemi a due stati, per esempio i sistemi di spin  $1/2$ . L'esperimento più illuminante è quello di Stern-Gerlach. Su questo sono d'accordo sia Penrose che Sakurai.

Sia dato un insieme di atomi a spin  $1/2$ ; per l'azione di un campo magnetico posso separare gli atomi con spin su da quelli con spin giù; determino così lo stato dei sistemi (ogni atomo è un sistema: o

meglio il sistema è l'elettrone di valenza dell'atomo, che funge solo da "supporto"); suddivido ulteriormente gli atomi su in atomi destri e sinistri; poi prendo solo gli atomi destri e determino di nuovo lo spin su e giù; classicamente dovrebbero essere tutti su; ma invece sono metà su e metà giù.

Allora, il primo esperimento costringe lo stato ad andare in su; il secondo ne determina le componenti destra e sinistra e prende solo la destra; ma lo stato destro ha ancora componente su e giù;

Questo spinge a trattare lo stato come un vettore in uno spazio astratto e l'operazione di misura come un operatore che prende il vettore di stato e lo proietta, o lo ruota, in un'altra direzione.